# Обобщение булевой алгебры

**Н.П. Брусенцов**

Булева алгебра в ее систематически упорядоченном виде [1] с базисными операциями конъюнкции, дизъюнкции и инверсии терминов представляет собой наиболее естественный и совершенный инструментарий классической (двухзначной) логики. Это алгебра четких и нечетких множеств терминов – элементарных конъюнкций, а также четких классов охарактеризованных совокупностями терминов вещей – дизъюнктивных нормальных форм. Четкость булевых классов обусловлена законом исключенного третьего, в силу которого отношение вещей к классам носит строго двухзначный характер: каждая из вещей рассматриваемого рода либо необходимо включена в данный класс, либо необходимо не включена в него (третьего не может быть). Этой четкости булева алгебра обязана простотой и замкнутостью – любая комбинация классов всегда есть класс.

Вместе с тем, исключенность третьего – причина того, что булева алгебра и классическая логика неадекватны содержательному отображению действительности, не вполне соответствуют интуиции, здравому смыслу. Убедительным подтверждением этого служит отношение следования, как известно, в булевой алгебре невыразимое, а вернее сказать, вырожденное в так называемую материальную импликацию, парадоксы которой логики безуспешно пытаются преодолеть. Сложность и запутанность проблемы содержательного следования в современной логике [2] объясняется тем, что в этой логике исключено то третье, без которого следование немыслимо.

В аристотелевой силлогистике непарадоксальное содержательное следование представлено общеутвердительной посылкой «Всякое $x$ есть $y$» («$y$ содержится в $x$», «из $x$ следует $y$»). Не удивительно, что силлогистику не удается «погрузить» в современные логические исчисления. Дело не в том, будто бы она «узкая» система, несовместимая с понятием пустого множества, а в ее диалектической трехзначности [3], немыслимой при исключенности третьего.

Множественная (интенсиональная) формулировка отношения следования осуществима средствами булевой алгебры, пополненной префиксным дизъюнктом $\vee$ – *функтором существования* (принадлежности вещи представленной выражением совокупности вещей). Так, общеутвердительная посылка «Всякое $x$ есть $y$» моделируется [4] конъюнктивной совокупностью (множеством) вещей:

$$\vee x \vee' xy' \vee y'$$

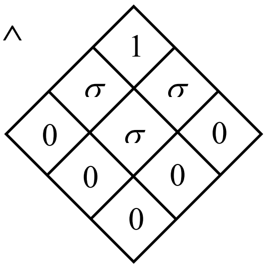
Этой совокупности необходимо принадлежат $x$-вещи и $y'$-вещи (не-$y$-вещи), а принадлежность $xy'$-вещей исключена, поэтому каждая $x$-вещь не может не быть $y$-вещью и каждая $y'$-вещь непременно есть $x'$-вещь. Другими словами, из $x$ необходимо следует $y$, и в силу контрапозитивности следования, не-$y$ не может не быть не-$x$.

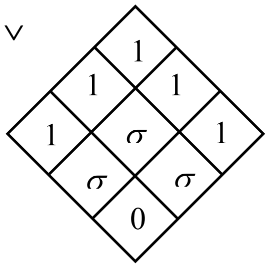
Существенная особенность данного выражения содержательного следования – упущенность (умолчание) в нем информации о принадлежности представленному им множеству $x'y$-вещей. В совершенной нормальной форме этого выражения – $\vee xy \vee' xy' \vee x'y'$ явно обозначена принадлежность $xy$-вещей и $x'y'$-вещей, антипринадлежность $xy'$-вещей, тогда как $x'y$-вещи просто не упомянуты, принадлежность их не зафиксирована – не принадлежат и не антипринадлежат. Таким образом выражено третье (промежуточное) значение принадлежности, называемое Аристотелем *привходящим*. При этом сохраняется возможность вписать взамен умалчивания дизъюнкт $\vee x'y$ либо его отрицание $\vee' x'y$. В обоих случаях представляющее следование *нечеткое* множество вещей превращается в четкое множество, в первом случае $\vee xy \vee' xy' \vee x'y \vee x'y'$, представляющее следование, но не эквивалентность, а во втором случае $\vee xy \vee' xy' \vee' x'y \vee x'y'$, представляющее эквивалентность $x \leftrightarrow y$.

Аналогичное умалчиваемое третье имеет место в булевой алгебре элементарных конъюнкций и дизъюнкций, представляющих собой множества и классы первичных терминов, которыми обозначены несоставные особенности вещей. В рассуждении с $n$ терминами $n$-арная конъюнкция (четкое их множество) именует конкретную вещь (индивид). Например, при $n$=3 конъюнкция $xy'z$ означает вещь, которой необходимо присущи особенности $x$ и $z$, а присущность особенности $y$ необходимо исключена (присуще не-$y$). Но принадлежность термина множеству может принимать и третье значение, выражающееся в том, что этот термин умалчивается в конъюнкции. Так, в том же рассуждении при $n$=3 конъюнкция $xy'$ представляет *нечеткое множество* особенностей, означающее не конкретную вещь, а неединичный (неиндивидный) класс вещей: $xy' \equiv xy'z \vee xy'z'$. Умолчание термина придает ему привходящий статус – не присущ и не антиприсущ. Можно называть это «неопределенностью», но ясно, что третье, вопреки общепринятому закону логики, не исключено не только в действительности, а и в самой двухзначной булевой алгебре, правда, только на 1-ой ее ступени, в алгебре элементарных конъюнкций и дизъюнкций. Необходимое обобщение предполагает распространение аналогичной трехзначности на алгебру вещей, охарактеризованных множествами терминов, т.е. на булеву алгебру в целом, что и было осуществлено выше применительно к интенсиональному (множественному) варианту булевой алгебры.

Современная же булева алгебра – система экстенсиональная (алгебра классов), поэтому непосредственное сообщение ей содержательного характера связано с приданием нечеткости классам вещей путем модификации дизъюнктивной нормальной формы. Требуется отделить привходящие вещи от необходимо исключенных. Это осуществимо в двух вариантах:
1) сохранив принятое ныне умалчивание как исключение с необходимостью, ввести функтор привходящего, например, в виде префикса $\sigma$, означающего $\sigma\upsilon\mu\beta\varepsilon\beta\eta\kappa o\varsigma$ – привходящее; 2) ввести функтор исключения с необходимостью, например, в виде надчеркивания либо знака «минус», а привходящее умалчивать. Содержательное следование $x \Rightarrow y$ в первом варианте выразится СДНФ $xy \vee \sigma x'y \vee x'y'$ и минимальной формой $x \vee \sigma x'y \vee y'$, а во втором варианте соответственно: $xy \vee xy' \vee x'y'$ и $x \vee xy' \vee y'$ либо $xy \vee -xy' \vee x'y'$ и $x \vee -xy' \vee y'$.

Первый вариант заслуживает предпочтения как совместимый с современной необобщенной алгеброй, не нарушающий традицию умалчивать исключенное, т.е. выражение четких классов вещей остается неизменным. Например, СДНФ и минимальное выражение материальной импликации $x \rightarrow y$ остаются теми же, что и в необобщенной алгебре: $xy \vee x'y \vee x'y'$ и $x' \vee y$. Замечательно, что при обощении по первому варианту остаются в силе принятые в булевой алгебре приемы преобразования выражений с учетом, естественно, того, что третье не исключено и находится в промежутке между крайними значениями, так что конъюнкция и дизъюнкция определены трехзначными таблицами Пирса:

$\wedge$ 

$\vee$ 

Адекватность обобщенной алгебры содержательной логике убедительно подтверждается полноценным отображением в ней силлогистики Аристотеля, базисные суждения которой представляются трехзначными функциями двухзначных переменных:

$$\mathrm{A}xy = xy \vee \sigma x'y \vee x'y', \quad \mathrm{I}xy = xy \vee \sigma x'y'.$$

Доказательство модуса Barbara: $\mathrm{A}xy\mathrm{A}yz \Rightarrow \mathrm{A}xz$, принятого в силлогистике в качестве аксиомы, обобщенная алгебра осуществляет путем следующего тождественного преобразования исходной конъюнкции суждений:

$$\mathrm{A}xy\mathrm{A}yz \equiv (xy \vee \sigma x'y \vee x'y')(yz \vee \sigma y'z \vee y'z') \equiv xzy \vee \sigma x'yz \vee \sigma x'y'z \vee x'y'z'.$$

Элиминацией по Булю-Порецкому термина $y$ полученное выражение редуцируется в $xz \vee \sigma x'z \vee x'z' \equiv \mathrm{A}xz$.

Таким же образом доказывается справедливость «сомнительных» с точки зрения классической двухзначной логики модусов третьей и четвертой фигур. Более того, оказывается, что из посылок модуса Bamalip необходимо следует не только частное, но и общее заключение:

$$\mathrm{A}zy\mathrm{A}xy \equiv (zy \vee \sigma z'y \vee z'y')(xy \vee \sigma x'y \vee x'y') \equiv xzy \vee \sigma xyz' \vee \sigma xy'z' \vee x'y'z',$$

что элиминацией термина $y$ редуцируется в $xz \vee \sigma xz' \vee x'z' \equiv \mathrm{A}zx$.

## Литература

1. Брусенцов Н.П. Упорядочение булевой алгебры // Программные системы и инструменты. Тематический сборник № 3. Под редакцией чл.-корр. РАН

Л.Н.Королева. – М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ, 2002. С. 11-27.

2. Брусенцов Н.П. О сложности и запутанности проблемы логического следования // Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке. Материалы VIII общероссийской научной конференции 24-26 июня 2004 г. – СПб, 2004. С. 231-233.

3. Брусенцов Н.П. Трехзначная интерпретация силлогистики Аристотеля // Историко-математические исследования. Вторая серия. Вып. 8 (43). – М.: «Янус-К», 2003. С. 317-327.

4. Брусенцов Н.П. Искусство достоверного рассуждения. Неформальная реконструкция аристотелевой силлогистики и булевой математики мысли. – М.: Фонд «Новое тысячелетие», 1998. С. 84-108.

Доложено на Ломоносовских чтениях 2004 г. на факультете ВМиК МГУ. Опубликовано: в «Программные системы и инструменты». Тематический сборник № 5. Под ред. Л.Н.Королева. – М. Издательский отдел ВМиК МГУ, 2005. С. 6-9; в сборнике «Реставрация логики» – М.: Фонд «Новое тысячелетие, 2005. С. 132-136.