Отчего математическая логика несодержательна

Н.П.Брусенцов

Отношение материальной импликации $x \rightarrow y$ представимо булевым уравнением $x' \vee y = 1$, решения которого относительно терминов x и y, выражающие взаимосвязь этих терминов, являются частичными функциями булевой алгебры $x(y) = xy$, $y(x) = x \vee y$, поскольку $x(y)$ неоднозначна при $y = 1$, а $y(x)$ неоднозначна при $x = 0$. Принято истолковывать это как парадоксы материальной импликации: “из ложного x следует все что угодно”, “истинное y следует из чего угодно”, однако вполне очевидно, что при $x = 0$, как и при $y = 1$, нет не только следования, но и вообще какой-либо взаимосвязи между x и y. Характеристическая функция материальной импликации $f(x, y) = x' \vee y$ вырождается при указанных условиях в константу 1.

В надежде устранить парадоксы К.Льюис [1, с. 8] предложил “строгую импликацию”, охарактеризовав ее как невозможность xy', символически $\mathrm{V}'xy'$, что явно ближе к аристотелеву содержательному следованию. Однако парадоксы всего лишь трансформировались. Ведь уравнение $\mathrm{V}xy' = 0$ удовлетворяется в случае $\mathrm{V}x = 0$ независимо от y, а в случае $\mathrm{V}y' = 0$ - независимо от x, т.е. взаимосвязь терминов в этих случаях опять отсутствует. Впрочем, устранить парадоксы можно просто, предотвратив ситуации, в которых они возникают уточнением характеристической функции [2] - $\mathrm{V}x\mathrm{V}'xy'\mathrm{V}y'$. Но ни сам Льюис, ни его последователи почему-то не сделали этого.

Полученное дизъюнктное КНФ-выражение, в совершенной нормальной форме - $\mathrm{V}xy\mathrm{V}'xy'\mathrm{V}x'y'$, позволяет истолковать охарактеризованное им отношение как нечеткое подмножество декартова произведения $(x, x')\times(y, y')$, необходимо содержащее члены xy и $x'y'$, не могущее содержать xy', а содержание $x'y$ не фиксирующее (игнорирующее) как несущественное, в чем и состоит нечеткость этого подмножества и вместе с тем трехзначность представляемого им отношения необходимого содержательного следования y из x.

Ясно, что классическая (т.е. двухзначная) логика, не допускающая в силу ее закона исключенного третьего нечетких множеств с их трехзначным отношением принадлежности, недостаточна для адекватного выражения необходимого следования. В условиях двухзначности несущественный член $x'y$ может только либо принадлежать, либо не принадлежать (точнее - антипринадлежать) рассматриваемому подмножеству, поскольку “третьего не дано”. Антипринадлежность $x'y$ приводит к четкому подмножеству $\mathrm{V}xy\mathrm{V}'xy'\mathrm{V}'x'y\mathrm{V}x'y'$, представляющему отношение эквивалентности $x = y$. Остается только принадлежность, которую и принимают, а в результате возникают парадоксы, что явно свидетельствует о неадекватности двухзначной логики.

Впрочем, формальное конструирование Яном Лукасевичем трехзначной и четырехзначной логик, а также предложенные затем варианты трехзначных импликаций Гейтинга, Бочвара, Клини и др.

проблемы необходимого следования так и не решили. Причина, по-видимому, в том, что никто не отважился нарушить неявно учрежденный стоиками, наряду с законом исключенного третьего, принцип бессодержательности формальной логики. В противоположность Аристотелю, который исследовал взаимосвязи обозначенных терминами особенностей реальных вещей, стоики сделали объектом логики беспредметные “высказывания”, для которых допустимы два значения “истинности” (модальности) - “истина” и “ложь”.

Заумность и нелепость подобной логики беспощадно разоблачены А.Ф.Лосевым в его полемических заметках [3] об «Основах теоретической логики» Д.Гильберта и В.Аккермана. Авторы полагали, что отклоняются от Аристотеля в истолковании отношения следования ради “математических применений логики, где класть в основу аристотелево понимание было бы нецелесообразно” [4, с.79]. На самом деле в условиях все той же введенной стоиками двухзначности отклонение было предопределено и произошло более двух тысяч лет тому назад, а затем еще сложилась несостоятельная убежденность в том, что двухзначность введена самим Аристотелем, основоположником логики. Гильберт и Аккерман, изложив формальную логику в строгих традициях математики, с небывалой до того очевидностью выявили ее неадекватность, что и позволило А.Ф.Лосеву осуществить, наконец, надлежащую критику законодательницы «правильного мышления» и «первоосновы всех наук».

В условиях двухзначной (“классической”) логики стоиков Гильберт и Аккерман не могли не отклониться от естественноязыкового (аристотелева) истолкования общеутвердительной посылки “Все x суть y“, согласно которому она признается истинной, лишь если существуют некоторые x. Но именно это отклонение лишило логику содержательности. Как установлено в неформальной «Символической логике» Льюиса Кэррола [5], естественноязыковое общеутвердительное суждение “Все x суть y“, необходимо содержит в себе частное суждение “Некоторое x есть y“ (“Некоторое xy существует“), а в двухзначной логике оно вырождено в “Ни одно x не есть не-y“, равнозначное импликации Льюиса $V'x'y'$, не утверждающей существования ни x, ни не-y. Аристотелево “Все x суть y“ означает, что сущность y необходимо содержится в сущности x, тогда как строгая импликация (не говоря уже о материальной) никакой содержательной взаимосвязи терминов не выражает. Поэтому с импликациями истинны такие умозаключения, как “Если дважды два равно четыре, то снег бел” [4, с.20].

Предостережение о несодержательности отношения материальной импликации не предотвращает ошибок, обусловленных неправомерным отождествлением этого суждения с естественноязыковым следованием. Ян Лукасевич, подменив следование материальной импликацией, алгебраически доказал [6, с.94], что аристотелево утверждение «Но невозможно, чтобы одно и то же было необходимо и когда другое есть, и когда его нет» ошибочно. Математическая логика отвергает четыре совершенно правильных модуса третьей и четвертой фигур традиционной силлогистики [7, с.18], потому что вследствие отклонения от аристотелева истолкования общеутвердительного суждения в этой логике частное не подчинено общему: истинность “Все x суть y“ не гарантирует истинности “Некоторые x есть y“.

Поразительно, что логика, не способная привести в соответствие со здравым смыслом свои парадоксальные импликации, безоговорочно бракует вполне очевидные, адекватные реальности положения как не отвечающие ее априорным “законам”. Более того, недопущение Аристотелем умозаключений невесть о чем квалифицируют как якобы непризнание им пустых множеств (то ли “понятий с пустым объемом”), тогда как в его определении следования налицо не только пустое, но и нечеткое подмножество. Понятие о последнем в современную логику было введено Л.Заде только в 1965 г., причем вызвало далеко не благоприятную реакцию логиков. Впрочем, они все еще отождествляют понятия «множество» и «класс», не усматривая в этом нарушения закона тождества.

Булевой алгебре классов удалось обойтись без материальной импликации, базируясь на отношении равенства в сочетании с допустимостью третьего - неопределенности либо вероятности умозаключения. Обстоятельное обоснование и существенное развитие это реалистическое направление получило в работах П.С.Порецкого [8, 9], которые, как и логика Кэррола, все еще не восприняты. Вместе с тем булева концепция умозаключения путем решения логических уравнений, кстати, не устраняющая содержательности терминов, уже извращена формалистами - выявление взаимосвязей подменено нахождением удовлетворяющих уравнению членов СДНФ.

Для обеспечения возможности выражать непредставимые в двухзначной логике взаимосвязи типа содержательного следования потребовалось обобщить булеву алгебру добавлением третьего статуса члена неэлементарной дизъюнкции - помимо “включен” и “исключен”, он может быть “несуществен”. В элементарных конъюнкциях и дизъюнкциях этот статус имелся и до обобщения. Так, в выражении n-терминной функции только индивидные конъюнкции и предполные дизъюнкции включают все n терминов, а вообще термины могут умалчиваться, принимая таким образом статус несущественных.

Например, виды выпуклого четырехугольника можно характеризовать соотношением его диагоналей: a - диагонали равны друг другу, b - перпендикулярны, c - пересечением делятся пополам. Элементарными троичными конъюнкциями этих терминов представлены: abc - квадрат, ac - прямоугольник, $ab'c$ - неквадратный прямоугольник, bc - ромб, $a'bc$ - неквадратный ромб, c - параллелограм, $a'c$ - непрямоугольный параллелограм и т. д. Неидивидные, умалчивающие отдельные из рассматриваемых терминов, конъюнкции равнозначны неединичным классам: $ac \equiv abc \vee ab'c$, $bc \equiv abc \vee a'bc$, $c \equiv abc \vee ab'c \vee a'bc \vee a'b'c$, $a'c \equiv a'bc \vee a'b'c$.

К сожалению, в необобщенной алгебре умалчивание члена СДНФ означает его исключенность из дизъюнкции, а не несущественность. Ради единообразия пришлось эту традицию нарушить, введя в качестве символа исключения знак «минус», а умалчиванием обозначить несущественность, как в элементарных формулах. Характеристическая функция содержательного следования $x \Rightarrow y$ в обобщенной таким образом булевой алгебре выражается в виде $xy \vee -xy' \vee x'y'$. Это СДНФ, в которой член $-xy'$ означает исключеннность xy', а умалчивание члена $x'y$ указывает на его несущественность. В отличие от рассмотренной ранее дизъюнктной характеристической функции этого же отношения $\mathrm{V}xy\mathrm{V}'xy'\mathrm{V}x'y'$, представляющей множество связанных отношением $x \Rightarrow y$ вещей, булева функция представляет собой нечеткий класс тех же вещей. Замечательно, что обе функции отобразимы в троичном логико-алгебраическом процессоре одним и тем же значением четырехтритного конструкта [10]: $+–0+$.

Пирсова таблица истинности функции $xy \vee -xy' \vee x'y'$ содержит “+” взамен традиционной “1” в клетках xy и $x'y'$, а в клетке xy' знак “–” взамен традиционного “0”, клетку же $x'y$, которая соответствует триту “0” в конструкте, естественно оставлять пустой, как то принято на диаграммах Кэррола. При этом таблица Пирса и диаграмма Кэррола внешне неразличимы, различие в интерпретации: Пирс интерпретирует отношение *экстенсионально*, как класс вещей, а у Кэррола интерпретация интенсиональная, множественная.

Небезынтересно заметить, что содержательное следование характеризуется трехзначной функцией двухзначных, а не трехзначных переменных. Этим отчасти можно объяснить неудачность многих попыток сконструировать полноценную импликацию в трехзначной логике, а также всеобщую убежденность в двухзначности логики Аристотеля. В «началах доказательства» [11, 946 b27] она действительно двухзначна, первичные термины необходимо двухзначны в том смысле, что если нечто не есть x, оно непременно есть x' (не-x), а все, что не есть x' не может не быть x. Это не существующие друг без друга антиподы (противоположности), в сопоставлении которых только и выявляется сущность x. Однако, Аристотель неоднократно отмечает: «Не быть белым не значит быть не-белым.», а в «Первой аналитике», наряду с утвердительной и отрицательной посылками, упоминает *диалектическую*, не утверждающую и не отрицающую с необходимостью.

Как показал анализ аристотелевой силлогистики, определяющим (необходимым и достаточным) условием содержательности логики оказывается установленный Гераклитом диалектический постулат *сосуществования противоположностей*, характеризующий, в частности, универсум Аристотеля УА [12]:

$$\mathrm{V}x\mathrm{V}x'\mathrm{V}y\mathrm{V}y'\ldots \equiv 1.$$

Смысл его в том, что ни одна из особенностей, совокупностями которых определены сущности вещей, не присуща всем возможным вещам, т.е. не может быть константой. Наряду с x-вещью непременно должна существовать x'-вещь (анти-x-вещь), иначе неизвестно, что означает термин x.

Гильбертово отклонение от Аристотеля, допустившее следование из несуществующего, лишило логику содержательности, здравого смысла, что тогда же было обнаружено и особо отмечено [4, с. 20]:

«Соотношение “если X, то Y” не следует понимать как выражение для отношения основания и следствия. Напротив, высказывание $X \rightarrow Y$ истинно всегда уже в том случае, когда X есть ложное или же Y истинное высказывание».

Однако в математической логике это «соотношение» называют, тем не менее, импликацией “если…, то…” и обозначают символом $\rightarrow$, а не $\leq$, употребляя его как следование на практике. Неопровержимые свидетельства тому упомянутое выше доказательство Лукасевичем ошибочности аристотелева положения, призванного предотвратить “доказательства” подобного рода, а также неподчиненность частного общему и отрицание достоверных модусов силлогистики. Более того, математическая логика полна противоестественных “законов” (тавтологий) типа “закона Дунса Скота”: $f \rightarrow P$ (“из ложного следует все, что угодно”). Странно, ведь именно Дунс Скот еще в тринадцатом веке осознал, что «следование имеет место там, … где оба термина изменчивы».

Ясно, что математическая логика, как и формальная логика в целом, лишена возможности обрести содержательность, потому что ее двухзначность несовместима с сосуществованием противоположностей – принципом, утверждающим то диалектическое третье, которое устранено пресловутым “законом исключенного третьего”. Адекватная логика, называйте ее содержательной, или диалектической, или здравой, должна быть заведомо трехзначной. Однако трехзначность еще не гарантирует содержательности, предоставляя формалистам несравнимо большие, чем двухзначность, возможности “законотворчества”. Так, число двухместных функций увеличивается с 16-ти до 19683, и многообразие логик становится поистине необозримым, тогда как содержательных двухтерминных отношений всего лишь 8, и ими исчерпывается аристотелева силлогистика [13] – безукоризненная основа содержательной, в частности, и непарадоксальной математической, логики.

Список литературы

1. Слинин Я.А. Современная модальная логика. Л., 1976.
2. Брусенцов Н.П. Трехзначная интерпретация силлогистики Аристотеля // Историко-математические исследования. Вторая серия. Вып. 8 (43). – М.: «Янус-К», 2003, с.317-327.
3. Лосев А.Ф. Критические заметки о буржуазной математической логике // Историко-математические исследования. Вторая серия. Вып. 8 (43). – М.: «Янус-К», 2003, с.339-401.
4. Гильберт Д., Аккерман В. Основы теоретической логики. – М.: ИЛ, 1947.
5. Кэррол Л. Символическая логика // Льюис Кэррол. История с узелками. – М.: «Мир», 1973, с.189-361.
6. Лукасевич Я. Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. – М.: ИЛ, 1959.
7. Колмогоров А.Н., Драгалин А.Т. Введение в математическую логику. – М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1982.
8. Порецкий П.С. О способах решения логических равенств и об обратном способе математической логики. – Казань, 1884.
9. Порецкий П.С. Решение общей задачи теории вероятностей при помощи математической логики. – Казань, 1887.
10. Брусенцов Н.П., Владимирова Ю.С. Троичная компьютеризация логики. // Математические методы распознавания образов: 12-я Всероссийская конференция: сборник докладов. – М.: МАКС Пресс, 2005. С. 40-42.
11. Аристотель. Метафизика // Сочинения в четырех томах. Том 1. – М.: «Мысль», 1975. С.63-367.

12. Брусенцов Н.П. Блуждание в трех соснах (Приключения диалектики в информатике). – М.: SvR-Аргус, 2000 15 с.; Программные системы и инструменты: Тематический сборник факультета ВМиК МГУ им. Ломоносова: № 1. Под ред. Л.Н. Королева. – М.: МАКС Пресс, 2000. С. 13-23.

13. Брусенцов Н.П. Реанимация аристотелевой силлогистики // Реставрация логиги. – М.: Фонд «Новое тысячелетие, 2005. С.140-145.

Опубликовано: Историко-математические исследования. Вторая серия. Вып. 11 (46). М.: Янус-К, 2006. С. 228-234.