Упорядочение булевой алгебры

Н.П. Брусенцов

Инструментальную основу современной информатики составляет булева алгебра с базисными операциями отрицания, конъюнкции и дизъюнкции, определенными таблицами, в которых набор значений как операндов, так и результатов операций исчерпывается двумя, интерпретируемыми обычно как «истина» и «ложь» и обозначаемыми соответственно цифрами «1» и «0», либо буквами: русскими «И», «Л», латинскими «T», «L». Это алгебра двухзначной «логики высказываний», отождествляющей символ операции отрицания «¬» с частицей «*не-*», символ конъюнкции «∧» – с грамматическим союзом «*и*», символ дизъюнкции «∨» – с «*или*». Истолковываемые таким образом символы операций называют *логическими связками*.

Выражения булевой алгебры представляют собой составные высказывания, «истинность» которых вычислима посредством определяющих связки таблиц. Применение же связок к выражениям и выявление действующих при этом алгебраических законов приводит к *исчислению высказываний*. Впрочем, последнее предпочитают формулировать с привлечением неэлементарной связки – *материальной импликации*, сопоставляемой отношению следования в естественных языках, которому она, увы, в сущности не тождественна. Таким образом, получилось исчисление, необыкновенно благоприятное для исследователей парадоксов, но на практике более чем бесполезное, ибо не соответствует здравому смыслу.

Каноническая, обходящаяся без импликации, булева алгебра семантическими парадоксами не омрачена, но и ее постулаты не вполне адекватны реальности и здравомыслию. Вследствие принятого в этой алгебре «априорного» закона исключенного третьего вне ее пределов оказались и модальности, и аристотелева силлогистика, иными словами, и интуиционизм, и диалектика.

Что-то в булевой алгебре не так, как должно быть по логике бытия. Прежде всего подозрение падает на операцию булева отрицания, которая почему-то определена так, что порождает *дополнение* отрицаемого до рассматриваемого многообразия возможностей (до *универсума*), т.е. в смысле «все то, что не A», где A – отрицаемое. Но ведь по здравому смыслу *отрицанием* данной определенности признается любая несовместимая с ней (противоречащая ей) определенность из имеющихся в универсуме. И ясно, что отрицание составных (неэлементарных) определенностей неоднозначно. Например, отрицаниями простейшей составной определенности *xy* – *конъюнкции* (совместности) элементарных определенностей x и y – будут: x', y', $x'y$, xy', $x'y'$, $x' \vee y'$.

В булевой алгебре из этих шести принято последнее, *отрицание-дополнение*. Оно «замечательно» тем, что не оставляет места промежуточному третьему: все, что не отрицается, утверждается и обратно, так что алгебра булевых выражений сохраняет свойственную элементарным определенностям двухзначность. Но оно не столь элементарно как диаметральная *инверсия* $x'y'$, сводящаяся к инвертированию в отрицаемом выражении всех вхождений каждой элементарной определенности, каждого термина.

Условимся обозначать дополнение префиксом «¬», а инверсию – постфиксом «штрих». Инверсия и дополнение, например, конъюнкции xy выразятся так:

$$(xy)' \equiv x'y', \qquad \neg (xy) \equiv xy' \vee x'y \vee x'y' \equiv x' \vee y'$$

В отличие от инверсии как потерминного инвертирования выражения, отрицание-дополнение достигается исключением отрицаемого выражения xy из характеризующей универсум полной дизъюнкции $xy \vee xy' \vee x'y \vee x'y' \equiv 1$. Затем полученное СДНФ-выражение минимизируется в $x' \vee y'$, оказывающееся *двойственным* (дуалом) тому, что дала инверсия. Таким образом, булево дополнение $\neg e$ выражения e есть дуал его инверсии e':

$$\neg e \equiv \delta(e')$$

Операция получения двойственного (дуала) δ состоит во взаимозамене в выражении-операнде символов $\wedge$ на $\vee$ и $\vee$ на $\wedge$.

Данное соотношение обратимо – инверсия в свою очередь есть дуал дополнения:

$$e' \equiv \delta(\neg e).$$

Однако инверсия, как уже было сказано, элементарней дополнения. Это видно из того, что функциональную полноту булевой алгебры обеспечивает пара дополнение-конъюнкция, либо же пара дополнение-дизъюнкция, тогда как в системе с инверсией необходимы и конъюнкция, и дизъюнкция. Дело в том, что непременный в определении дополнения закон исключенного третьего $e \vee \neg\ e \equiv 1$ на инверсию не распространяется и поэтому тождество де Моргана

$$x \wedge y \equiv \neg\,(\neg\, x \vee \neg\, y),$$

определяющее посредством дополнения конъюнкцию через дизъюнкцию и обратно, в случае инверсии не имеет места. В силлогистике инверсии соответствует контрарность, а дополнению – контрадикторность [1].

Базисные операции алгебры, поименованные и обозначенные каждая собственным знаком (функтором), определены, с одной стороны, чисто формально таблицами истинности и предписаниями механических манипуляций, производимых над последовательностями символов, отображающими алгебраические выражения. С другой стороны, эти операции имеют содержательную интерпретацию (истолкование, смысл, семантику), и не одну.

Выражения булевой алгебры обычно истолковывают как *высказывания* – предложения, принимающие одно из двух значений «истинности», или как атрибуты классов, к которым относится либо, наоборот, не может относиться классифицируемая по представленным элементарными терминами *критериям* (признакам) вещь. С классами связана *объемная* (*экстенсиональная*) интерпретация выражений, согласно которой подклассы называют содержащимися во включающих их классах и подчиненными им, что составляет диаметральную противоположность принятой в естественном рассуждении *смысловой* (*интенсиональной*) интерпретации. Интенсионально атрибут класса *содержится* в атрибутах его подклассов и *подчинен* каждому из них, *сказывается* о каждом, *необходимо присущ* каждому включенному в него, *необходимо следует* из него.

Рассмотрим конкретные примеры интенсиональной интерпретации простейшего булева выражения – элементарной конъюнкции. В n-терминном универсуме, т.е. при различении по n первичным критериям, имеем n-местную (n-арную) конъюнкцию, каждой из компонент которой придается один из трех статусов: *необходимо присущее* / *антиприсущее* / *привходящее*. Булева конъюнкция содержит (необходимо) присущие ей термины непосредственно, без каких-либо функциональных знаков, каждый антприсущий термин – под знаком инверсии, привходящие термины не содержатся (умалчиваются). Например, в трехтерминном x,y,z-универсуме конъюнкции xyz' присущи x и y, антиприсуще z, конъюнкции же xz' присуще x, антиприсуще z, а умалчиваемое в ней y – привходяще, т.е. необходимо не присуще и не антиприсуще.

Еще одна практически важная интерпретация булевых выражений – *теоретико-множественная* [2]. Та же конъюнкция xyz' истолковывается как множество, которому *принадлежат* элементы x, y и *антипринадлежит* (не может принадлежать) элемент z. Конъюнкция xz' представляет собой нечеткое множество, которому необходимо принадлежит x, антипринадлежит z, а элемент y не принадлежит и не антипринадлежит с необходимостью (безусловно). Элементы обретают привходящий статус в результате дизъюнкции множеств, например: $xyz' \vee xy'z' \equiv xz'$ [3].

Конъюнкции без умолчания терминов являются четкими, категорическими множествами в традиционном понимании. Дизъюнкции конъюнкций (ДНФ-выражения) представляют собой нечеткие множества. Множества вообще, четкие и нечеткие, условимся называть *совокупностями*. Произвольное булево выражение в теоретико-множественной (совокупностной) интерпретации истолковывается как совокупность первичных терминов. Операция инверсии выражения инвертирует представленную этим выражением совокупность терминов, превращая принадлежащие ей в антипринадлежащие, антипринадлежащие в принадлежащие, а привходящие оставляя без изменения.

К булевым выражениям как к совокупностям терминов применимы, помимо инверсии, операции пересечения, объединения и теоретико-множественной разности. Примеры:

$$(xyz')' \equiv x'y'z$$

$$xyz' \bigcap xz \equiv xyz' \bigcap (xyz \vee xy'z) \equiv xyz' \vee xy'z' \equiv xz'$$

$$xyz' \bigcup xz \equiv xyz' \bigcup (xyz \vee xy'z) \equiv xyz$$

$$xyz' \setminus xz \equiv xyz' \bigcap (xz)' \equiv xyz' \bigcap x'z' \equiv x'z'$$

Вместе с тем, базисные булевы операции (связки) – конъюнкция и дизъюнкция – обретают новое истолкование как конъюнкция и дизъюнкция совокупностей. Четкая совокупность (множество) формируется путем конъюнкции нечетких, например: $xz' \wedge xy \equiv xyz'$. Нечеткие совокупности суть дизъюнкции четких, например: $xyz' \vee xy'z' \equiv xz'$.

Совокупностная интерпретация булевых выражений естественно изоморфна их интенсиональной и экстенсиональной интерпретациям. Так, элементарная конъюнкция, не содержащая привходящих (умалчиваемых) терминов, т.е. представляющая четкую совокупность терминов, интенсионально понимается как *индивидное* в принятом универсуме понятие, а экстенсионально – как атрибут индивидного класса. Нечетким совокупностям соответствуют размытые, содержащие несущественные термины, понятия и неиндивидные классы. Нельзя, однако, отождествлять (и даже смешивать) категории класса и множества, как это принято в логике, и в традиционной, и в математической.

Посредством базисных связок – инверсии, конъюнкции и дизъюнкции – выразима произвольная n-местная (n-терминная, n-арная) *булева функция*. Более того, в нормальных формах (ДНФ и КНФ) инвертируются только первичные термины, а в совершенных нормальных формах (СДНФ и СКНФ) нет умалчивания терминов. Выражение в совершенной дизъюнктивной форме представляет собой дизъюнкцию индивидных (n-терминных) конъюнкций, определяющую класс соответствующих этим конъюнкциям четких совокупностей (множеств) терминов. Этому классу соответствует в алгебре 2-й ступени (в булевой алгебре дизъюнктов) четкая совокупность n-терминных индивидов, которые в логике предикатов называют «предметами». Нечеткой совокупности таких индивидов, допускающей привходящую принадлежность ей некоторых из них, в алгебре 1-й ступени соответствует класс с привходящей включенностью в него отдельных подклассов – *нечеткий класс*.

Например, характеристическая функция отношения следования, представленного в аристотелевой силлогистике общеутвердительным суждением «Всякое x есть y» («Всякому x присуще y», «y содержится в x», «y необходимо следует из x»), выражается конъюнкцией дизъюнктов вида:

$$\mathsf{V}xy\mathsf{V}'xy'\mathsf{V}x'y'$$

где знак интегральной дизъюнкции, аналога интегральной суммы, – дизъюнкт V – символизирует дизъюнкцию значений, принимаемых поддизъюнктным выражением на элементах характеризуемой совокупности, распространенную на всю эту совокупность.

Рассматриваемая нечеткая совокупность 2-й ступени характеризуется необходимой принадлежностью ей индивидов xy и $x'y'$, необходимой непринадлежностью (антипринадлежностью) xy' и привходящей принадлежностью индивида $x'y$, который в выражении умалчивается. Атрибут соответствующего этой совокупности индивидов класса в алгебре 1-й ступени определяется как общий всем ее членам, т.е.

дизъюнкцией атрибутов всех необходимо принадлежащих совокупности, а также привходящих индивидов. В рассматриваемом примере такой нечеткой дизъюнкцией будет

$$xy \vee \sigma x'y \vee x'y'$$

где σ – символ третьего «значения истинности» – *привходящего:* не-0 и не-1, а нечто небезусловное, некатегоричное, оцениваемое как вероятность, либо как доля (часть, процент) дискретного значения 1: $0 < \sigma < 1$.

Эта небулева дизъюнкция выражает характеристическую функцию *импликации*, которая в двухзначной булевой алгебре огрублена в «материальную импликацию» $(x \rightarrow y) \equiv xy \vee x'y \vee x'y'$ и, вместе с тем, в «эквивалентность» $(x \leftrightarrow y) \equiv xy \vee x'y'$.

Возвращаясь к выражению нечеткой совокупности 2-й ступени – характеристической функции отношения *необходимого следования*, приведем другие выражения этой совокупности, полученные путем тождественного преобразования представленного выше ее выражения:

$$\bigvee xy \bigvee' xy' \bigvee x'y' \equiv \bigvee x \bigvee' xy' \bigvee y' \equiv \bigvee x \bigwedge (x' \vee y) \bigvee y'$$

Каждое из этих выражений выявляет в отношении необходимого следования y из x ту или иную его характерную черту, позволяет, так сказать, посмотреть на него с разных сторон. Согласно первому выражению, y следует из x, если в универсуме имеются (существуют) вещи класса xy и класса $x'y'$, но не может быть вещей класса xy'. Второе выражение требует существования классов x и y', исключая существование класса xy'. В третьем выражении требование несуществования класса xy' преобразовано в удовлетворенность каждой из вещей условию материальной импликации $x \rightarrow y \equiv x' \vee y$.

То, что всеобщая удовлетворенность импликации равносильна несуществованию (т.е. исключенности) xy', еще раз указывает на несущественность в ее СДНФ-выражении члена $x'y$. А то, что удовлетворенность импликации не означает необходимого следования (кроме нее требуется существование x и существование y'), снимает проблему «строгих» и «сильных» импликаций, опровергая вместе с тем общепринятое «положение», будто бы из противоречия следует все что угодно. Импликация действительно удовлетворяется в случае противоречивости антецедента, но ведь противоречивое не существует, а из несуществующего ничто не может следовать.

Однако возвратимся к 1-й ступени, с тем чтобы уточнить и четко сформулировать принципы, положенные в ее основание. Составляя первооснову булевой алгебры, 1-я ступень является тем самым и фундаментом всех последующих, определяемых посредством этой алгебры разделов информатики – теории множеств, арифметики и теории чисел, числовых функций, а главное – искусства достоверного рассуждения (доказательства), которое по Аристотелю «будучи способом исследования, прокладывает путь к началам всех учений» [4, 101b3].

Оптимальное упорядочение информатики в целом достижимо лишь при оптимальной упорядоченности ее основания – булевой алгебры, а порядок в алгебре задается выбором ее *базиса* – совокупности первичных операций, посредством которых выражаются все прочие функции. Впрочем, базисом обычно называют минимальную функционально полную систему операций. Однако при таком понимании возникает затруднение с той же булевой алгеброй, в которой базисными операциями служат $\neg$, $\wedge$, $\vee$, а из них выделяются два минимальных функционально полных набора: $\neg$, $\wedge$ и $\neg$, $\vee$. Что же называть ее базисом?

Условимся называть базисом алгебры функционально полную, не обязательно минимальную, совокупность *элементарных* операций, применяемых в «правильных» выражениях этой алгебры. Понимаемый таким образом базис может быть минимальным либо избыточным, как это имеет место в булевой алгебре с операциями дополнения, конъюнкции и дизъюнкции. Для упорядочения же существенно, чтобы базисные операции были элементарными, несоставными.

Элементарный неизбыточный базис булевой алгебры составляют операции *инверсии*, *конъюнкции* и *дизъюнкции*.

Операция инверсии булева выражения определена как инвертирование каждого вхождения каждого из имеющихся в этом выражении терминов. Например:

$$(x'\vee y)' \equiv x \vee y', \ (xy')' \equiv x'y, \ (xy'\vee x'y)' \equiv x'y \vee xy', \quad 0' \equiv (xx')' \equiv x'x \equiv 0.$$

Операции конъюнкции и дизъюнкции выражений однозначно определены присущими им законами дистрибутивности и поглощения, однако в оптимально упорядоченной системе они реализуемы более просто и эффективно, например, как соответственно пересечение и объединение представляющих данные выражения совокупностей их СДНФ-членов. *Упорядочение* (синоним «структурирования») – это выявление в рассматриваемом естественного порядка взаимосвязей и неуклонное подчинение ему в процессе исследования и развития системы. Образцами упорядочения, к сожалению не получившими должного понимания и применения, являются «Упорядочение дел человеческих» и «Великая дидактика» Яна Амоса Коменского, а в наше время – «Структурированное программирование» Эдсгера Дейкстры. Основоположником упорядочения следует признать первооткрывателя диалектики Гераклита, который указал на существование всеобщего естественного миропорядка и назвал его *Логосом*. С учетом дальнейшей модификации смысла этого слова следует истолковывать его как адекватное отображение указанного миропорядка в сознании и в языке людей, в информатике.

По-видимому, фундаментальный принцип и метод упорядочения состоит в выявлении и последовательном использовании спиралеобразной иерархии компонент отображаемой взаимосвязи. Например, компонентами молекул полагаются атомы, в свою очередь сконструированные из компонент атомного уровня, которые затем декомпонуются на более элементарные составляющие, и т.д. Хотя можно ведь «слепить» молекулу и непосредственно из элементарных частиц. В «неструктурированном программировании» именно так и делали, пока Э.Дейкстра не выступил с призывом «Разделяй и властвуй», впрочем, нажлежащего понимания не получившим.

В булевой алгебре структурирование состоит в том, что выражения, отображающие функции терминов-переменных, конструируются не непосредственно из терминов и базисных связок, а в виде иерархии, на нижнем уровне которой порождаются стандартные подвыражения, используемые в качестве компонент, связываемых друг с другом базисными связками на следующем уровне. Наглядный пример естественного структурирования выражений – совершенные нормальные формы: дизъюнктивная и конъюнктивная.

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ) выражения булевой функции n переменных – это дизъюнкция n-терминных (индивидных) конъюнкций, представляющая собой четкую, альтернативную, совокупность (*класс*) индивидов в n-терминном универсуме. Кстати, операция отрицания-дополнения булева выражения равносильна инверсии этой совокупности индивидов. Действительно, из составляющих
n-терминный универсум 2^n индивидных конъюнкций (из полной совокупности их) подсовокупность членов СДНФ-выражения

соответствует именуемому данным выражением классу, а инверсия этой совокупности,
т.е. дополняющая до 2^n подсовокупность, в той же дизъюнктивной форме представляет собой выражение дополнительного класса, является отрицанием-дополнением исходного СДНФ-выражения. Короче говоря, операция отрицания-дополнения СДНФ-выражения сводится к инвертированию совокупности его членов.

Аналогично обнаруживается, что конъюнкция СДНФ-выражений сводится к *пересечению,* а дизъюнкция – к *объединению* совокупностей членов каждого из этих выражений. Например:

$(xy \vee xy' \vee x'y') \wedge (xy \vee x'y \vee x'y') \equiv xy \vee x'y'$

$(xy \vee x'y) \vee (xy' \vee x'y) \equiv xy \vee xy' \vee x'y$

В совершенной конъюнктивной нормальной форме (СКНФ) выражение представлено конъюнкцией предполных дизъюнкций, т.е. дополнений индивидных конъюнкций. Например, выражение характеристической функции $x \leftrightarrow y$ отношения эквивалентности, состоящее в СДНФ из двух индивидов: $xy \vee x'y'$, в СКНФ оказывается конъюнкцией дизъюнкций:
$(x \vee y')(x' \vee y)$, причем дизъюнкции эти суть дополнения индивидов $x'y$ и xy' из СДНФ-выражения функции антиэквивалентности: $xy' \vee x'y$. Операция отрицания-дополнения СКНФ-выражения, как и СДНФ, сводится к инвертированию совокупности его членов. Однако конъюнкции СКНФ-выражений соответствует не пересечение, а *объединение*, и дизъюнкции – не объединение, а *пересечение* совокупности их членов. Примеры:

$(x' \vee y)(x \vee y') \wedge (x' \vee y) \equiv (x' \vee y)(x \vee y')$

$(x' \vee y)(x \vee y') \vee (x' \vee y) \equiv x' \vee y$

$\neg(x \vee y) \equiv (x \vee y')(x' \vee y)(x' \vee y')$

В n-терминном универсуме n-арные элементарные конъюнкции определяют четкие совокупности (*множества*) терминов, тогда как связывание дизъюнкцией порождает нечеткие совокупности (*классы*). И те и другие можно *потерминно* инвертировать, пересекать, объединять, формируя из выражений-операндов выражения-результаты, определяющие искомые совокупности. Примеры:

инверсия: $(x' \vee y)' \equiv x \vee y'$

пересечение: $x' \cap y \equiv (x'y \vee x'y') \cap (xy \vee x'y) \equiv x'y \vee x'y' \equiv x'$

объединение: $x' \cup y \equiv (x'y \vee x'y') \cup (xy \vee x'y) \equiv xy \vee x'y \equiv y$

Несложно выявить алгебраические законы, которым подчинены понимаемые таким образом операции пересечения, объединения и инверсии булевых выражений, т.е. сформулировать положения (аксиомы), формально определяющие эти операции.

Пересечение и объединение, подобно конъюнкции и дизъюнкции, идемпотентны и коммутативны:

$x \bigcap x \equiv x \qquad\qquad x \bigcup x \equiv x$

$x \bigcap y \equiv y \bigcap x \qquad\qquad x \bigcup y \equiv y \bigcup x$

Они взаимно дистрибутивны одно относительно другого, а также относительно конъюнкции и дизъюнкции:

$(x \bigcap y) \bigcup z \equiv (x \bigcup z) \bigcap (y \bigcup z) \qquad (x \bigcup y) \bigcap z \equiv (x \bigcap z) \bigcup (y \bigcap z)$

$(x \bigcap y) \vee z \equiv (x \vee z) \bigcap (y \vee z) \qquad (x \bigcup y) \vee z \equiv (x \vee z) \bigcup (y \vee z)$

$(x \bigcap y) \wedge z \equiv xz \bigcap yz \qquad (x \bigcup y) \wedge z \equiv xz \bigcup yz$

$(x \wedge y) \bigcap z \equiv (x \bigcap z) \wedge (y \bigcap z)$ и т.д.

Инверсия булева выражения формально означает инвертирование каждого вхождения каждого из входящих в это выражение терминов с сохранением неизменными всех иных связок. При этом инверсия первичного (элементарного) термина x удовлетворяет аксиомам:

$$(x')' \equiv x, \quad x \bigcap x' \equiv x', \quad x \bigcup x' \equiv x, \quad x \wedge x' \equiv 0, \quad x \vee x' \equiv 1$$

Содержательно инверсия термина означает изменение на противоположный его статуса как члена совокупности. Инвертируются, в сущности, не термины, а их статусы в рассматриваемой совокупности: принадлежность ей термина x заменяется антипринадлежностью (исключенностью принадлежности) – x', антипринадлежность же x' заменяется принадлежностью x. Так что инвертируются не термины, а совокупности. Инверсией же отдельного термина называют, допуская «вольность речи», инверсию однотерминной совокупности, однотерминного булева выражения.

Точно так же, пересечение и объединение – это пересечение и объединение совокупностей. Пересечение формирует совокупность, содержащую только те термины, которые принадлежат всем пересекающимся совокупностям, т.е. позволяет извлечь из данного набора характеристик общую для них сущность. Объединение, наоборот, признает антипринадлежащими результирующей совокупности лишь те термины, которые антипринадлежат каждой из объединяемых совокупностей, так что формируется наименее строгая характеристика определяемого объекта.

Собственно отдельные термины суть символы элементарных (не конкретизируемых в принятом универсуме) определенностей, конъюнкцией и дизъюнкцией которых, а также их инверсий, образуются простейшие составные выражения булевой алгебры – *элементарные конъюнкции* и *дизъюнкции.* Они представляют собой первичные неэлементарные определенности, к которым также применимы операции конъюнкции и дизъюнкции. Вместе с тем, они интерпретируются и как совокупности элементарных определенностей, преобразуемые посредством их инверсии, пересечения и объединения.

Конъюнкция булевых выражений (КНФ) представляет собой совокупность *необходимых* условий того, что охарактеризовано этой конъюнкцией в целом. Поэтому представленный КНФ-выражением объект имеет место (необходимо дан) лишь в случае, когда даны все члены КНФ. Обратно, из данности КНФ-выражения необходимо следует данность каждого его члена.

Дизъюнкция булевых выражений (ДНФ) определяет характеризуемый ею объект дизъюнктивным (альтернативным) перечнем *достаточных*, но не необходимых, условий – подвыражений более строгих, чем ДНФ-выражение в целом. Это различные конкретизации объектов обозначенного ДНФ-выражением класса. Из данности класса следует *возможность* каждого из относящихся к этому классу объектов (подклассов), становящаяся *необходимостью* при наложении надлежащих дополнительных условий.

Начало иерархически упорядоченной булевой алгебры, или основание ее первой ступени, составляют инверсия и конъюнкция *первичных* (несоставных, недекомпозируемых) терминов. Комбинация (“суперпозиция”) этих операций порождает простейший тип составного булева выражения – *элементарную конъюнкцию.* Алгебра элементарных конъюнкций замкнута и функционально полна в том смысле, что инверсии и конъюнкции выражений этого типа суть тоже элементарные конъюнкции, а всякая представимая в виде элементарной конъюнкции функция терминов реализуема посредством операций инверсии и конъюнкции. Порождая элементарные конъюнкции, эти операции применимы затем и к ним самим, наряду с потерминными операциями пересечения и объединения их как совокупностей терминов.

В n-терминном универсуме всего 3^n различных элементарных конъюнкций, из которых 2^n индивидные (без умалчивания терминов), соответствующие четким совокупностям, т.е. множествам присущих характеризуемым ими индивидам первичных определенностей. Неиндивидные (“нечеткие”) элементарные конъюнкции именуют неиндивидные классы рассматриваемых «предметов», представляя собой нечеткие совокупности присущих им определенностей. Следует заметить, что понятие индивида (“предмета”, “вещи”) относительно: n-терминная элементарная конъюнкция представляет собой индивид только в n-терминном универсуме, т.е. при вхождении в нее всех принятых в этом универсуме терминов, а с введением в универсум новых терминов прежняя индивидность n-терминной конъюнкции утрачивается. Таким образом, индивидные конъюнкции отображают сущности «вещей» с предопределенным в универсуме огрублением.

Вторая ступень алгебраической иерархии строится посредством тех же операций инверсии и конъюнкции, но применяемых теперь не к первичным терминам, а к индивидам. Они представлены n-терминными элементарными конъюнкциями и в отличие от терминов, предполагающихся ортогональными, т.е. совмещаемыми друг с другом в любых сочетаниях, попарно несовместимы. Поэтому совокупность индивидов немыслима как нераздельное единство, не может быть «единичной вещью». Она может быть лишь набором, группой взятых вместе, *сосуществующих*, единичных вещей. Так сказать, конъюнкцией их существований.

Существование в универсуме U «вещи», охарактеризованной булевой функцией первичных терминов (атрибутом) f, есть *принадлежность* $f \in$ U – отношение, равносильное присущности U существования f:

$\mathrm{U} = \mathrm{U} \wedge \bigvee f$

Интегральная дизъюнкция (“дизъюнкт”) $\bigvee f$ есть дизъюнкция значений, принимаемых атрибутом f на элементах совокупности U, распространенная на всю эту совокупность, т.е. на весь универсум. *Сосуществование* (сопринадлежность совокупности U) «вещей» f и g выражается соответственно конъюнкцией их существований:

$\mathrm{U} = \mathrm{U} \bigvee f \bigvee g$

Отношения существования и сосуществования выразимы при помощи квантора существования $\exists$ логики предикатов: $\bigvee f = \exists p\ f(p)$, $\bigvee f\ \bigvee g = \exists p\ f(p)g(p)$, где p – «предметная переменная». Однако ввиду отмеченной выше относительности понятия «предмета» (индивида) и обусловленной им неоправданной усложненности алгебры, вместо кванторов с предметной переменной целесообразней использовать аналоги интегральной суммы и произведения – интегральные дизъюнкцию и конъюнкцию (дизъюнкт и конъюнкт). При этом алгебра совокупностей 2-й ступени (совокупностей индивидов) с базисными операциями инверсии и конъюнкции полностью воспроизводит булеву алгебру 1-й ступени, но теперь применительно не к первичным терминам, а к дизъюнктам и конъюнктам.

Конкретная совокупность индивидов в n-терминном универсуме отображается конъюнкцией неинвертированных и инвертированных дизъюнктов от n-арных элементарных конъюнкций. Например, в x,y-универсуме совокупность индивидов xy и $x'y'$, представляющая собой отношение актуальной эквивалентности $x \Leftrightarrow y$, выражается в виде $\bigvee xy \bigvee' xy' \bigvee' x'y \bigvee x'y'$, а нечеткая совокупность индивидов, соответствующая отношению актуального (необходимого) следования $x \Rightarrow y$, получается элиминацией в этом выражении дизъюнкта $\bigvee' x'y$: $\bigvee xy \bigvee' xy' \bigvee x'y'$.

В алгебре 1-й ступени эти совокупности отображены выражениями общих атрибутов принадлежащих им индивидов, т.е. дизъюнкциями n-арных конъюнкций (СДНФ-выражениями), представляющими собой отношения потенциальной эквивалентности $x \leftrightarrow y$ в виде $xy \vee x'y'$ и потенциального следования $x \rightarrow y$ в виде $xy \vee \sigma x'y \vee x'y'$. Буква σ означает привходящий статус индивида $x'y$ – не принадлежит с необходимостью и не антипринадлежит. В обычной булевой алгебре подобная возможность отображения привходящего не предусмотрена, поэтому отношение следования представлено в ней «материальной импликацией»: $xy \vee x'y \vee x'y'$ – общим атрибутом совокупности $\bigvee xy \bigvee' xy' \bigvee x'y \bigvee x'y'$, соответствующей частному случаю отношения следования. Другим частным случаем следования является эквивалентность $\bigvee xy \bigvee' xy' \bigvee' x'y \bigvee x'y'$.

Налицо взаимно однозначное соответствие СДНФ-выражения общего для всех элементов совокупности индивидов атрибута дизъюнктному выражению самой этой совокупности: оба выражения содержат одну и ту же информацию, знание одного из них позволяет воссоздать другое. При этом инверсия совокупности индивидов равнозначна булеву отриცанию-дополнению общего атрибута ее членов. Выходит, что в булевой алгебре в качестве базисной операции отрицания избрана инверсия 2-й ступени, тогда как поистине базисная инверсия 1-й ступени (инверсия всех вхождений первичных терминов) просто проигнорирована. Правда, в случае однотерминного выражения эти инверсии неразличимы. Однако, только в нем единственном.

Установленное соответствие СДНФ-выражения общего атрибута индивидов совокупности ее дизъюнктному выражению означает также равнозначность конъюнкции (дизъюнкции) СДНФ-выражений и пересечения (объединения) их дизъюнктных аналогов. Другими словами, конъюнкция (дизъюнкция) булевых выражений осуществима путем пересечения (объединения) совокупностей членов СДНФ этих выражений, что технически существенно проще традиционной процедуры, использующей законы дистрибутивности.

Истолкование булевой алгебры терминов как теоретико-множественной алгебры индивидов, т.е. реализация булева отрицания инвертированием совокупности членов СДНФ-выражения, а конъюнкции и дизъюнкции путем соответственно пересечения и объединения «СДНФ-совокупностей», радикально упрощает, в частности, процедуру решения булевых уравнений, которая играет в алгебре логики наиважнейшую роль. По мнению самого Буля, предмет логики заключается именно в решении логических уравнений [5], а если иметь в виду математическую логику, то это безоговорочно так, ибо математическая она потому, что сводит умозаключение (вывод, доказательство) к решению уравнения. Впрочем, современная «математическая логика», предпочтя импликацию, уравнениями и вовсе не занимается.

Логическим, или булевым, уравнением называют равенство

$$f = g$$

в котором f, g – булевы функции терминов x_1, x_2,..., x_n, а знак = символизирует заданность отношения эквивалентности (равносильности), выполняющегося на тех наборах (n-ках) значений терминов x_1, x_2,..., x_n, на которых значения, принимаемые функциями f и g, совпадают. Совокупность таких n-ок алгебраисты называют отношением равенства функций f и g. Запись $f = g$ означает связанность f и g отношением эквивалентности:

$(f \leftrightarrow g) = 1$, подобно тому как $x = 1$ означает данность (наличие) термина x.

Решением булева уравнения относительно термина x_i называют рекурсивную функцию $x_i = \varphi\ (x_1,\ x_2,\ x_3,...,\ x_n)$, удовлетворяющую заданному уравнению. Но ведь не лишено смысла и решение относительно одного из индивидов, т.е. совокупности терминов, а также относительно дизъюнкции тех или иных индивидов, т.е. некоторой булевой функции терминов, частным случаем которой является и термин x_i.

Положим, что функции f и g (левая и правая части уравнения) представлены СДНФ-выражениями, т.е. дизъюнкцияими индивидов. Ясно, что индивид удовлетворяет уравнению, если он входит в обе его части либо не входит ни в левую, ни в правую часть. Назовем такой индивид *парным* [6, с.47]. Индивиды же, входящие в одну из частей, но не входящие в другую (*непарные* индивиды), уравнению не удовлетворяют. Разделение индивидов на парные и непарные радикально упрощает получение решений, а также тождественные преобразования уравнений. Действительно, выражаемое уравнением отношение сохраняется неизменным при переносе непарных индивидов из одной части уравнения в другую, а также при добавлении в обе части либо исключении из обеих частей парных индивидов.

Приведение к так называемой «нулевой» форме, в которой правая часть уравнения представляет собой пустую дизъюнкцию (обозначается цифрой «0»), достигается исключением всех парных индивидов и переносом всех непарных в левую часть. «Единичная» форма с обозначаемой цифрой «1» полной дизъюнкцией в правой части получается добавлением в обе части уравнения не представленных в них парных индивидов и переносом из левой части в правую всех непарных, в результате чего в правой части образуется полная дизъюнкция. Примеры:

1) $xyz \vee xyz' = xyz' \vee x'y'z'$ тождественно $xyz \vee x'y'z' = 0$

2) $xy' \vee x'y' = x'y'$ тождественно $xy \vee x'y \vee x'y' = xy \vee xy' \vee x'y \vee x'y'$, тождественно $xy \vee x'y \vee x'y' = 1$, тождественно $xy' = 0$.

Решение уравнения относительно одного из индивидов, либо термина, либо произвольного атрибута получается путем тождественного преобразования, формирующего в левой части СДНФ-выражение искомого объекта.

Например, решение уравнения из примера 2) относительно термина x получается преобразованием к виду: $xy \vee xy' = xy$, где $xy \vee xy' = x(y \vee y') = x$, т.е. решение в канонической форме будет:

$$x = xy$$

$$x = \begin{cases} 0 \text{ при } y = 0 \\ \text{привходяще при } y = 1 \end{cases}$$

Решение этого же уравнения относительно термина y:

$xy \vee x'y = xy \vee xy' \vee x'y$

$y = xy \vee xy' \vee x'y$

$y = x \vee y$

$$y = \begin{cases} \text{привходяще при } x = 0 \\ 1 \text{ при } x = 1 \end{cases}$$

Решение относительно индивида xy:

$xy = xy \vee xy'$

$xy = x$

$$xy = \begin{cases} 0 \text{ при } x = 0 \\ 1 \text{ при } x = 1 \end{cases}$$

Решение относительно $x \vee y$:

$xy \vee xy' \vee x'y = xy \vee xy'$

$x \vee y = x$

$$x \vee y = \begin{cases} 0 \text{ при } x = 0 \\ 1 \text{ при } x = 1 \end{cases}$$

Решение уравнения из примера 1) относительно термина x:

$xyz \vee x'y'z' = 0$

$xyz \vee xyz' \vee xy'z \vee xy'z' = xyz' \vee xy'z \vee xy'z' \vee x'y'z'$

$x = x(yz' \vee y'z) \vee y'z'$

$$x = \begin{cases} 1 \text{ при } y = z = 0 \\ \text{привходяще при } y \neq z \\ 0 \text{ при } y = z = 1 \end{cases}$$

Как видно, решение уравнения относительно заданного атрибута заключается в преобразовании уравнения к виду, при котором СДНФ-выражение атрибута составляет левую часть в СДНФ-выражении уравнения, обе части которого затем минимизируются. Сущность минимизации СДНФ-выражений в том, что булевы функции терминов, представленные дизъюнкциями индивидных конъюнкций, переводятся обратно в неиндивидное (“несовершенное”) представление [3]. Дизъюнкции индивидов порождают термины и неиндивидные классы терминов, подобно тому как конъюнкцией терминов образуются индивиды.

Впрочем, так называемая *двойственность* дизъюнкции и конъюнкции этим не исчерпывается: индивидным конъюнкциям однозначно соответствуют их «дуалы» – предполные дизъюнкции, конъюнкция которых порождает совершенную конъюнктивную нормальную форму (СКНФ) булевых выражений. Возникает точно такая же иерархия ступеней, как рассмотренная выше ассоциирующаяся с СДНФ, однако полностью двойственная, т.е. вместо индивидных конъюнкций теперь предполные n-арные дизъюнкции терминов, дизъюнкция индивидов, составляющая СДНФ, стала конъюнкцией двойственных индивидам предполных дизъюнкций, дизъюнкты индивидов – конъюнктами предполных дизъюнкций.

Формально выражение, двойственное данному, получается взаимозаменой в нем всех конъюнкций дизъюнкциями и всех дизъюнкций конъюнкциями. Содержательно оно есть дополнение инверсии данного, что равносильно инверсии его дополнения:

$$\delta e = \neg\, e' = (\neg\, e)'$$

Поэтому для преобразования выражения e в двойственную форму надо выполнить над ним (в любом порядке) операции инверсии, дополнения и дуалирования, т.е. взаимозамены конъюнкций с дизъюнкциями. Например, перевод в КНФ выражения $xy \vee x'y \vee x'y'$:

$\neg\, (xy \vee x'y \vee x'y') = xy'$, $\quad (xy')' = x'y,$ $\quad \delta(\, x'y) = x \vee y'$;

перевод в КНФ выражения $\;xy \vee \sigma x'y \vee x'y'$:

$\neg\, (xy \vee \sigma x'y \vee x'y') = xy' \vee \sigma x'y$, $\quad (xy' \vee \sigma x'y)' = x'y \vee \sigma xy'$,

$\delta\, (x'y \vee \sigma xy') = (x' \vee y)(\, x \vee y' \vee \sigma)$;

перевод в ДНФ выражения $\;(x \vee y)(x' \vee y)(x' \vee y')$:

$\neg\, (x \vee y)(x' \vee y)(x' \vee y') = (x \vee y')$, $\;\delta(x \vee y') = xy'$, $\;(xy')' = x'y.$

Проще получается дополнение выражения e, представленное в двойственной форме:

$$\neg\, e = \delta\, (e') = (\delta e)'.$$

Это дуал инверсии данного выражения либо инверсия дуала его – процедура, унифицирующая правила де Моргана отрицания конъюнкции $\neg(xy) = \neg x \vee \neg y$ и отрицания дизъюнкции $\neg(x \vee y) = \neg x \neg\, y$.

Существенно, что КНФ есть совокупность *необходимых*, а ДНФ – *достаточных* условий того, что представлено выражением в целом. Двойственность формы сопряжена с фундаментальной парой содержательных критериев – необходимости и достаточности.

Произвольное выражение булевой алгебры, как в ДНФ, так и в КНФ, представимо при помощи трех функторов-связок: инверсии, конъюнкции и дизъюнкции, составляющих базис этой алгебры. Прочие функторы, такие как дополнение, дуалирование, пересечение объединение, подчинение, обозначают операции над выражениями, в нормальных формах не используемые (“небазисные”). Дизъюнкты и конъюнкты, а также символ привходящего σ, к «классической» булевой алгебре не относятся и составляют необходимое расширение, вернее, развитие ее, связанное с построением 2-й ступени и с допущением нечетких атрибутов совокупности индивидов.

Дизъюнктивная форма начинается с элементарной конъюнкции, выражающей в ее n-арном варианте *единичное* (индивид) в n-терминном универсуме. Все прочие, нечеткие (неиндивдные) выражения в ДНФ суть дизъюнкции элементарных конъюнкций. В частности, дизъюнкция 2^n-1 индивидов есть «предполная дизъюнкция», составляющая дополнение недостающего в ней 2^n-го индивида, в совокупности с которым она становится «полной», т.е. универсумом.

Конъюнктивная форма устроена аналогично, но начинается с противоположного – с элементарной дизъюнкции, которая в n-арном варианте является предполной дизъюнкцией, т.е. дополнением противоположного ей индивида до универсума. Совершенной нормальной формой предполной дизъюнкции называется дизъюнкция 2^n-1 индивидов, а минимальной формой – n-арная элементарная дизъюнкция.

Литература

1. Брусенцов Н.П. Искусство достоверного рассуждения. Неформальная реконструкция аристотелевой силлогистики и булевой математики мысли. – М.: Фонд «Новое тысячелетие», 1998.

2. Брусенцов Н.П., Деркач А.Ю. Трехзначная логика, нечеткие множества и теория вероятности. // Программные системы и инструменты. Тематический сборник № 2. Под редакцией чл.-корр. РАН Л.Н. Королева. – М.: Факультет ВМиК МГУ, 2001. С. 88-91.

3. Брусенцов Н.П., Владимирова Ю.С. Трехзначный минимизатор булевых выражений. // Программные системы и инструменты. Тематический сборник № 2. Под редакцией чл.-корр. РАН Л.Н. Королева. – М.: Факультет ВМиК МГУ, 2001. С. 205-207.

4. Аристотель. Топика. // Сочинения в четырех томах. Том 2. – М.: «Мысль», 1978.

5. Брусенцов Н.П., Владимирова Ю.С. Решение булевых уравнений. // Методы

математического моделирования. – М.: «Диалог МГУ», 1998. С. 59-68.
6. Брусенцов Н.П. Начала информатики. – М.: Фонд «Новое тысячелетие», 1994.

Доложено на Ломоносовских чтениях 2002 г. на факультете ВМиК МГУ. Опубликовано в «Программные системы и инструменты». Тематический сборник № 3. Под ред. Л.Н.Королева. – М.: Издательский отдел ВМиК МГУ, 2002. С. 11-27. А также «Реставрация логики». – М.: Фонд «Новое тысячелетие», 2005. С. 50-68.