

Трехзначное обобщение алгебры логики

Преодоление несовершенности ДНФ трехзначным обобщением логики.

Двухзначная булева алгебра недостаточна для отображения необходимого следования $x \Rightarrow y$ – важнейшего логического отношения, представленного в естественном языке словосочетаниями: "Все x суть y ", "Все x необходимо присуще y ", "Сущность y целиком содержится в сущности x ", "Класс x является подклассом класса y , класс y' - подклассом класса x' ". Посредством символа эквивалентности "=" это отношение представимо рекурсивной $x = xy$. Однако в дизъюнктивной нормальной форме представление его неизбежно вырождается либо в эквивалентность $(x \Rightarrow y) \equiv xy \vee x'y'$, либо в парадоксальную "материальную импликацию" $(x \supset y) \equiv xy \vee x'y \vee x'y'$.

Неадекватность булевой алгебры обусловлена тем, что умалчивание членов ДНФ означает в ней исключенность (несуществование) их, тогда как в действительности наряду с исключенностью имеет место несущественность члена для отображаемого отношения. Так, в ДНФ-выражении отношения следования $x \Rightarrow y$ член $x'y'$ необходимо исключен, а член $x'y$ игнорируется как несущественный. Если его исключить, возникнет тождество $(x \Rightarrow y)$, а если сохранить, то следование превратится в "материальную импликацию" $(x \supset y)$.

Ясно, что несущественность надо отличать от несуществования-исключенности. Кстати, в элементарных конъюнкциях это различие воплощено. Например, термин y в конъюнкции xzy утверждаем, в $x'y'z$ отрицаем, а в xz умалчиваем как несущественный, не исключен, но и не необходим (возможен).

Аналогично, в ДНФ умалчиваться должны только несущественные члены, а исключенность надо обозначать специальным символом, например, кэрроловым индексом несуществования "0" [1, с. 255].

Отношение необходимого следования $(x \Rightarrow y)$ в обобщенной таким образом булевой алгебре представимо в трехзначной ДНФ, выражением $xy \vee xy'_0 \vee x'y'$, в котором член $x'y$ умалчивается как несущественный.

Материальная импликация $(x \supset y)$ выражается этой же ДНФ, но без умолчания члена $x'y$: $(x \supset y) \equiv xy \vee xy'_0 \vee x'y \vee x'y' \equiv \lceil xy' \equiv x' \vee y \equiv (x \Rightarrow y) \vee x'y$.

В кэрроловом определении следования [1, с. 256] $(x \Rightarrow y) \equiv x_1 \wedge xy'_0$ недостает члена y'_1 , без которого отношение оказывается соблюденным при общезначимом y независимо от x ,

поскольку xu'_0 у Кэррола означает несуществование xu' . Полноценным выражением будет $(x \Rightarrow y) \equiv x_1 \wedge xu'_0 \wedge y'_1$.

Но для реальных, сосуществующих с их противоположностями терминов x , x' , y , y' кэрролово несуществование (nullity) xu'_0 равнозначно несовместимости x с y' , обусловленной тем, что в x содержится y , а в y' содержится x' , т. е. $x = xy$, $y' = x'y'$. Таким образом, в реальном универсуме Аристотеля кэрролово xu'_0 вынуждает следование $(x \Rightarrow y)(y' \Rightarrow x')$.

Взаимосвязанность терминов порождается тем, что в сущности одного содержится сущность другого либо ее противоположность. Если $x = xy$, т. е. в x содержится y , то соблюдена xu'_0 - несовместимость x с y' , означающая также $y' = x'y'$. Поэтому $xu'_0 \equiv (x \Rightarrow y)(y' \Rightarrow x')$ - "Все x суть y ", "Все y' суть x' ", из x необходимо следует y , из y' необходимо следует x' , тогда как $\neg xu' \equiv x' \vee y \equiv (x \supset y)(y' \supset x')$ - "материальная импликация", соблюденная при существовании y независимо от x и при несуществовании x независимо от y .

Наглядным примером является взаимосвязанность квадратности с прямоугольностью и равносторонностью четырехугольника. Все квадраты суть прямоугольники и ромбы, но ни прямоугольник, ни ромб еще не есть квадрат. Прямоугольность и равносторонность целиком содержатся в квадратности. Но не все прямоугольники и ромбы квадратны, квадратность не сказывается о них. Наоборот, прямоугольность и равносторонность необходимо присущи квадратам, сказываются обо всех них.

Аристотель ошибся, полагая что "одно целиком содержится в другом" означает то же, что "другое сказывается обо всем первом". [Первая аналитика, 24b26]. Но диалектическая трехзначность его силлогистики вопреки общепринятой догме исключенного третьего безупречна.

Литература

1. Кэррол Л. Символическая логика. // История с узелками. – М.: "Мир", 1973.

Опубликовано: Н.П. Брусенцов, Ю.С. Владимирова. Аристотелева силлогистика в символической логике Льюиса Кэрролла. М: - Фонд «Новое тысячелетие», 2011. С. 5-6