

Н.П. Брусенцов
Усовершенствование логики умозаключений

Москва
Фонд «Новое тысячелетие»
2012

Отношение следования

Отношение следования, составляющее основу достоверных умозаключений, отсутствует в современной математической логике. У Аристотеля следование y из x представлено общеутвердительным суждением Axy : "Все x суть y ", истолковываемым как "у присуще всем x ", "сущность y содержится в сущности каждого x ", "каждое x есть y ", $x = xy$ – "из x необходимо следует y ".

Математические логики [1, 2] якобы в силу каких-то потребностей математики полагают Axy соблюденным при несуществовании x , извратив отношение следования в парадоксальную "материальную импликацию", которая и без того в логике имеется: $(x \rightarrow y) \equiv Axy \vee x'y$, но следования не составляет.

Алгебраически отношение следования выразимо методом индексов Льюиса Кэрролла [3, с. 256], представившего "Все x суть y " конъюнкцией $x_1 \wedge xy'_0$, в которой упущен член y'_1 – существование y' . Это упущение затем возмещено с учетом контрапозитивности следования [3, с. 310, 317] $(x \Rightarrow y)(y' \Rightarrow x') \equiv x_1y'_0 \wedge y'_1x_0$. Однако в реальном, подчиненном сосуществованию противоположностей, универсуме Аристотеля УА [4] следование $x \Rightarrow y$ безусловно выражает кэрролово nullity xy'_0 , где штрих - символ противоположности, а индекс "0" – несовместимости членов индексируемой конъюнкции.

Несовместимость (несуществование) xy'_0 обусловлена тем, что в особенности x содержится противоположность особенности y' , т.е. $x = xy$ – "из x следует y ". Соответственно $y' = x'y'$ – "если нет y , то нет и x ".

Таким образом, $Axy \equiv Ay'x' \equiv (x = xy)(y' = x'y') \equiv (x \Rightarrow y)(y' \Rightarrow x') \equiv xy'_0$.

Общеутвердительное Axy противоположно общеотрицательному $Exy \equiv A'xy \equiv Axy'$, обратно $Ayx \equiv Ax'y' \equiv (y \Rightarrow x)(x' \Rightarrow y')$ и несовместимо с частными $Oxy \equiv Ixy' \equiv \neg Axy$.

Литература

1. Гильберт Д., Аккерман В. Основы теоретической логики. – М.: ИЛ 1947.
2. Клини С.К. Математическая логика. – М.: "Мир", 1973.
3. Кэрролл Л. Символическая логика // Льюис Кэрролл. История с узелками. – М.: "Мир", 1973.
4. Брусенцов Н.П. Начала информатики. – М.: Фонд "Новое тысячелетие", 1994.

Преодоление несовершенности ДНФ

Двухзначная булева алгебра недостаточна для отображения необходимого следования $x \Rightarrow y$ – важнейшего логического отношения, представленного в естественном языке словосочетаниями: "Все x суть y ", "Все x необходимо присуще y ", "Сущность y целиком содержится в сущности x ", Посредством символа эквивалентности "=" это отношение представимо рекурсией $x = xy$. Однако в дизъюнктивной нормальной форме представление его неизбежно вырождается либо в эквивалентность $(x=y) \equiv xy \vee x'y'$, либо в парадоксальную "материальную импликацию" $(x \rightarrow y) \equiv xy \vee x'y \vee x'y'$, представляющую лишь возможность (неисключенность) следования $x \Rightarrow y$.

Неадекватность булевой алгебры обусловлена тем, что умалчивание членов ДНФ означает в ней исключенность (несуществование) их, тогда как в действительности наряду с исключенностью имеет место несущественность члена для отображаемого отношения. Так, в ДНФ-выражении отношения следования $x \Rightarrow y$ член $x'y'$ необходимо исключен, а член $x'y$ игнорируется как несущественный. Если его исключить, возникнет тождество $(x=y)$, а если сохранить, то следование превратится в "материальную импликацию" $(x \rightarrow y)$.

Ясно, что несущественность надо отличать от несуществования-исключенности. Кстати, в элементарных конъюнкциях это различие воплощено. Например, термин y в конъюнкции xuz утверждаем, в $xu'z$ отрицаем, а в xz умалчиваем как несущественный, не исключен, но и не необходим (возможен).

Аналогично, в ДНФ умалчиваться должны только несущественные члены, а исключенность надо обозначать специальным символом, например, кэрроловым индексом несуществования "0" [1, с. 255].

Отношение необходимого следования $(x \Rightarrow y)$ в обобщенной таким образом булевой алгебре представимо в трехзначной ДНФ, выражением $xy \vee xy'_0 \vee x'y'$, в котором член $x'y$ умалчивается как несущественный.

Материальная импликация $(x \rightarrow y)$ выражается этой же ДНФ, но без умолчания члена $x'y$:

$$(x \rightarrow y) \equiv xy \vee xy'_0 \vee x'y \vee x'y' \equiv \bar{1}xy' \equiv x' \vee y \equiv (x \Rightarrow y) \vee x'y.$$

В кэрроловом определении следования [1, с. 256] $(x \Rightarrow y) \equiv x_1 \wedge xy'_0$ недостает члена y'_1 , без которого отношение оказывается соблюденным при общезначимом y независимо от x , поскольку у Кэррола xu'_0 означает несуществование xu' . Полноценным выражением будет $(x \Rightarrow y) \equiv x_1 \wedge xy'_0 \wedge y'_1$.

Но для реальных, сосуществующих с их противоположностями терминов x , x' , y , y' кэрролово несуществование (nullity) xy'_0 равнозначно несовместимости x с y' , обусловленной тем, что в x содержится y , а в y' содержится x' , т. е. $x = xy$, $y' = x'y'$. Таким образом, в реальном универсуме Аристотеля кэрролово xy'_0 вынуждает следование $(x \Rightarrow y)(y' \Rightarrow x')$.

Взаимосвязанность терминов порождается тем, что в сущности одного содержится сущность другого либо ее противоположность. Если $x = xy$, т. е. в x содержится y , то соблюдена xy'_0 - несовместимость x с y' , означающая также $y' = x'y'$. Поэтому $xy'_0 \equiv (x \Rightarrow y)(y' \Rightarrow x')$ - "Все x суть y ", "Все y' суть x' ", из x необходимо следует y , из y' необходимо следует x' , тогда как $\neg xy' \equiv x' \vee y \equiv (x \rightarrow y)(y' \rightarrow x')$ - "материальная импликация", соблюденная при существовании y независимо от x и при несуществовании x независимо от y .

Наглядным примером является взаимосвязанность квадратности с прямоугольностью и равносторонностью четырехугольника. Все квадраты суть прямоугольники и ромбы, но ни прямоугольник, ни ромб еще не есть квадрат. Прямоугольность и равносторонность целиком содержатся в квадратности. Но не все прямоугольники и ромбы квадратны, квадратность не сказывается о них. Наоборот, прямоугольность и равносторонность необходимо присущи квадратам, сказываются обо всех них.

Аристотель ошибся, полагая что "одно целиком содержится в другом" означает то же, что "другое сказывается обо всем первом" [Первая аналитика, 24b26]. Ведь если, "другое сказывается обо всем первом", то сущность этого другого содержится в сущности первого, а не первое ("одно") целиком содержится в другом.

Литература

1. Кэррол Л. Символическая логика // Льюис Кэррол. История с узелками. – М.: "Мир", 1973.

Единство противоположностей – первооснова непарадоксальной логики

Ленинское истолкование диалектики как учения о единстве противоположностей [1] указывает на неизбежность сочетания противоположностей в определениях логических отношений.

Изначально необходимо подчинить сосуществованию противоположностей универсум рассмотрения, установив, что все представленные в нем терминами x, y, z, \dots элементарные особенности сущностей необходимо сосуществуют с их противоположностями x', y', z', \dots . Это сосуществование при попарной несовместимости (несуществовании xx', yy', zz', \dots) и есть единство противоположностей.

Вместе с тем, особенности могут быть сочетаниями непротивоположных, например, $xу, xу'z$, а также содержащими в себе непротивоположных им, например: $x = xу, x = xу'z$ – в сущности x целиком содержится сущность $у$, сущность $у'z$.

В современной математической логике отношение $x = xу$, обозначаемое также Axy , отождествлено с материальной импликацией $(x \rightarrow y) \equiv x' \vee y$ [2, 3]. Это обусловлено тем, что действительно эквивалентное $x = xу$ трехзначное отношение полноценного следования $x \Rightarrow y$ в двухзначной логике невыразимо. Оно представимо посредством префиксализъюнкта \forall [4]: $(x \Rightarrow y) \equiv \forall'xy'\forall x\forall y'$, либо методом индексов Кэррола [5]: $(x \Rightarrow y) \equiv xy'_0x_1y'_1$.

Отмеченное несовершенство математической логики преодолевается трехзначным обобщением дизъюнктивной нормальной формы. В ней умалчиваемые ныне исключенные члены надо не умалчивать, а индексировать нулем (кэрролово nullity). При этом умалчиваться естественно будут члены несущественные [6].

Литература

1. Ленин В.И. Полное собрание сочинений, т. 29, с. 203.
2. Порецкий П.С. Логические равенства. – М.: «Русская правда», 2011.
3. Лобанов В.И. Русская логика в информатике. – М.: «Русская правда», 2010
4. Брусенцов Н.П. Начала информатики. – М.: Фонд «Новое тысячелетие», 1994, с. 132.
5. Кэррол Л. Символическая логика // Льюис Кэррол. История с узелками. – М.: "Мир", 1973.
6. Брусенцов Н.П. Упорядочение математической логики. – М.: Фонд «Новое тысячелетие», 2011.

Трехзначность безукоризненной логики Аристотеля

Непредставимость отношения следования в булевой алгебре свидетельствует о неполноценности двухзначной логики. При трехзначном истолковании следование $x \Rightarrow y$ (« y целиком содержится в x ») представимо усовершенствованной ДНФ $xy \vee xy'_0 \vee x'y'$, в которой индекс «0» означает исключенность отмеченного им члена, а умалчивание, представляющее в двухзначной логике исключенность, истолковывается теперь как несущественность. Умалчивание в ДНФ отношения $x \Rightarrow y$ члена $x'y$ указывает на то, что представленное отношение соблюдено независимо от наличия или отсутствия этого члена.

Несоставные (первичные) особенности x, y, z, \dots и их противоположности x', y', z', \dots в логике Аристотеля не только не могут несуществовать, но необходимо сосуществуют с их противоположностями. Несуществование порождается несовместимостью совмещаемых. Поэтому наряду с символом противоположности (штрихом) достаточно символа несовместимости – индекса «0», к несоставным особенностям неприменимого.

В усовершенствованной введением символа несовместимости (индекса «0») ДНФ нет необходимости в индексе «1», поскольку неиндексируемые нулем члены неисключаемы, а несущественные умалчиваются. Умалчивание как выражение несущественности, а не исключенности, которую оно выражает в двухзначной логике, позволяет однозначно определять сущности отношений, предотвращая нечеткости и парадоксы.

В частности, отношение следования $x \Rightarrow y \equiv xy \vee xy'_0 \vee x'y'$ отличается от материальной импликации $x \rightarrow y \equiv xy \vee xy'_0 \vee x'y \vee x'y'$ умалчиванием несущественного члена $x'y$.

Опубликовано: Н.П. Брусенцов. Усовершенствование логики умозаключений. М.: Фонд «Новое тысячелетие», 2012

«Единство противоположностей – первооснова непарадоксальной логики» также в: Программные системы и инструменты. Тематический сборник № 12. М.: Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2011. С.22.