Владимирова Ю.С.

Трехзначная логика Льюиса Кэрролла как основа компьютеризации содержательного рассуждения

Для компьютеризации содержательного рассуждения, основанного на выявлении взаимосвязей между сущностями рассматриваемых вещей, требуется адекватное представление исследуемых взаимосвязей, в первую очередь, наиболее значимой из них – содержательного следования. При истолковании x и y как особенностей, характеризующих исследуемые вещи, отношение содержательного следования $x \Rightarrow y$ имеет место, когда сущность y содержится в сущности x, т.е. $x = xy$. Эта взаимосвязь не допускает совмещения особенности x с y' – противоположностью y, а x' – противоположность x должна содержаться в y': $y' = x'y'$. При этом о совместимости x' и y сказать ничего нельзя: они возможно совместимы, но могут быть и несовместимыми, – тогда имеет место эквивалентность $x = y$.

В математической логике в качестве модели следования принимается материальная импликация $x \supset y = xy \vee x'y \vee x'y'$, в выражении которой все три конъюнкции xy, $x'y$, $x'y'$ равноправны. В условиях двухзначности возможную, но не необходимую несовместимость x' с y выразить нельзя, $x'y$ оказывается необходимым, в результате чего материальной импликацией формально допускаются взаимосвязи между никак не связанными в действительности вещами. Например, считается, что имеется взаимосвязь $x \supset y$, когда ни одного x нет, а y – произвольный. Отсутствие в двухзначной логике средств выражения отношения следования, обусловленное неразличимостью отношений, вынуждаемых сущностями вещей, и формальных отношений, возникающих лишь в силу свойств материальной импликации, но не имеющих места в реальности, ограничивает практическое применение двухзначной логики.

Указанный недостаток устраняется введением третьего значения, выражающего не необходимость, возможность. Обозначая несовместимость особенностей индексом 0, приписываемым к конъюнкции, и считая умалчиваемые конъюнкции не необходимыми, получим трехзначное обобщение булевой алгебры, допускающее три статуса членов ДНФ – «необходимо дан», «необходимо исключен» и «возможен». Наличие третьего-привходящего статуса позволяет непарадоксально выразить отношение содержательного следования:

$$(x \Rightarrow y) = xy \vee x'y' \vee xy'_0.$$

Естественный способ выражения взаимосвязей между вещами изобрел Льюис Кэрролл, использовавший как средство для обучения содержательной логике силлогистику Аристотеля [1]. В его трехзначной алгебре логические взаимосвязи задаются совокупностями вещей, характеризуемых присущими им особенностями.

Характеристики вещей строятся посредством булевых связок. Конъюнкция обозначающих особенности букв-терминов выражает совместную присущность этих особенностей некоторой вещи, и представляет собой характеристику всех обладающих этой особенностью вещей – соответствующего класса вещей. Например, конъюнкция $xy'z$ характеризует вещи, которым одновременно присущи три особенности x, y', и z. Умалчивание в характеристике класса особенности и ее противоположности означает несущественность для данной вещи соответствующего качества, например, вещи $xz = xyz \vee xy'z$ могут обладать как y, так и его противоположностью y', особенность y для xz-вещей несущественна. В общем случае особенности вещей представляются произвольными булевыми выражениями, которые для дальнейшего изложения удобно полагать приведенными в СДНФ.

Третье значение «несущественность» Кэрролл использует не только для умалчивания особенностей в характеристиках вещей, но и для обозначения возможного существования вещи в совокупности наряду с необходимым их существованием и несуществованием. Так если в методе диаграмм [1] клетка, соответствующая xy-вещам, занята красной фишкой (алгебраически $\mathsf{V}xy$), то в совокупности, соответствующей диаграмме, существуют xy-вещи, если черной фишкой ($\mathsf{V}'xy$), xy-вещи исключены, а если клетка остается пустой – они возможны.

В логике Кэрролла исследуются всевозможные совокупности вещей, в том числе и такие, которым не соответствуют реальные взаимосвязи. Например, суждение «Ни один x не есть y» Кэрролл понимает как совокупность $\mathsf{V}'xy$, в которой может не быть ни одного x и ни одного y, допуская таким образом отношения между несуществующими вещами, невозможные в силлогистике Аристотеля. Привести логику Кэрролла в соответствие с аристотелевским пониманием отношений можно, приняв предполагаемое в силлогистике применительно к качествам сосуществование противоположностей [3], – принцип, согласно которому каждая рассматриваемая особенность вместе со своей противоположностью должна быть представлена в рассмотрении хотя бы одной вещью, или, что то же самое, непустота классов x, x', y, y'. Благодаря соблюдению этого принципа, в силлогистике исключаются рассуждения о несуществующем, приводящие к парадоксам. Например, отношение следования $x \Rightarrow y$ определяется в скорректированной логике Кэрролла совокупностью $\mathsf{V}xy\mathsf{V}x'y'\mathsf{V}'xy'$, где $\mathsf{V}xy$ и $\mathsf{V}x'y'$ означают необходимое существование в совокупности xy- и $x'y'$-вещей, $\mathsf{V}'xy'$ – непременное отсутствие xy'-вещей, а $x'y$-вещи, о которых ничего не сказано возможны. Класс вещей, принадлежащих указанной совокупности характеризуется в алгебре, обобщенной введением третьего значения, как $xy \vee xy'_0 \vee x'y'$.

Метод диаграмм Кэрролла [1], скорректированный в соответствии с принятием сосуществования противоположностей, раскрывает сущность исследуемых взаимосвязей: они оказываются вынуждаемыми несовместимостью некоторых особенностей. В рассмотренном примере отношение следования необходимо возникает в условиях сосуществования противоположностей, когда особенности x и y' оказываются несовместимыми: поскольку xy'-вещи не существуют, появляется необходимость существования xy- и $x'y'$-вещей, а существование $x'y$-вещей ничем не вынуждается.

В методе диаграмм, представляющих совокупности вещей, сформулированы способы оперирования этими совокупностями, которые алгебраически выражаются в виде следующих очевидных правил [4, 5]:

1. $\mathsf{V}'(xy \vee xy') \equiv \mathsf{V}'xy\mathsf{V}'xy'$ – если класс пуст, пусты все его подклассы;
2. $\mathsf{V}x\mathsf{V}'xy' \equiv \mathsf{V}xy\ \mathsf{V}'xy'$ – если класс непуст, но один из его подклассов пуст, дополнение этого подкласса до непустого класса непусто;
3. $\mathsf{V}(xy \vee xy') \equiv \mathsf{V}xy \vee \mathsf{V}xy'$ – непустота класса вещей тождественна непустоте хотя бы одного его подкласса;
4. $\mathsf{V}xy \Rightarrow \mathsf{V}x$ – из непустоты подкласса следует и непустота охватывающего его класса вещей.

Использование приведенных правил позволяет исчерпывающе выразить традиционную силлогистику Аристотеля, исследующую отношения между несоставными особенностями [3], каждая из которых соответствует наличию либо отсутствию у вещи только одного качества. Очевидно, что обобщенная введением третьего-привходящего статуса булева алгебра допускает выражение отношений между составными особенностями, представленными произвольными выражениями и нахождение взаимосвязей между такими особенностями. Эта задача рассматривалась и Кэрроллом – введенные им методы индексов и деревьев [2] нацелены на расширение возможностей силлогистики посредством решения соритов – задач, содержащих произвольное количество посылок, а также рассмотрения суждений, связывающих составные особенности, таких как, «Всякий xy есть z».

Система совместно данных посылок в общем случае может включать произвольное количество отношений между составными особенностями, представленными булевыми выражениями, из n задающих универсум рассмотрения несоставных особенностей $x_1,..., x_n$.

В соответствии с принципом сосуществования противоположностей, все $x_1,..., x_n$ и их противоположности не пусты.

Исходные посылки конъюнктивно совмещаются, при этом, согласно правилу (1) все выражения, характеризующие пустые классы могут быть сведены к одной СДНФ, обозначим ее $N(x_1,..., x_n)$ (от кэрролловского *nullity*). По правилу (3), система посылок содержит не менее $2n$ выражений в СДНФ, соответствующих классам, обязанным не быть пустыми (в частности, классам $x_1, x_1',..., x_n, x_n'$), обозначим их $E_1(x_1,..., x_n), \ldots, E_k(x_1,..., x_n)$ (от *entity*). Заметим, что обязаны существовать вещи, характеризуемые каждым выражением $E_i(x_1,..., x_n)$, однако конъюнкции, входящие в каждую СДНФ $E_i(x_1,..., x_n)$ возможны, но не необходимы. Правило (2) позволяет удалить из каждой $E_i(x_1,..., x_n)$ конъюнкции, входящие в $N(x_1,..., x_n)$, при этом ни одно из $E_i(x_1,..., x_n)$ не может исчерпать все свои конъюнкции, поскольку это приведет к рассмотрению особенности (простой или составной), не представленной ни одной вещью.

Отыскание взаимосвязи между некоторыми составными особенностями $f(x_1,..., x_n)$ и $g(x_1,..., x_n)$, производится выявлением несовместимости f либо ее противоположности f' с g либо с ее противоположностью g'. Например, если f и g' оказываются несовместимыми, то имеет место отношение следования $(f \Rightarrow g) \equiv (g' \Rightarrow f')$, а если несовместимы f и g – отношение $(f \Rightarrow g') \equiv (g \Rightarrow f')$.

Несовместимость f и g обнаруживается сопоставлением конъюнкции fg с выражением $N(x_1,..., x_n)$ и каждой СДНФ f и g со всеми $E_i(x_1,..., x_n)$. Если в $N(x_1,..., x_n)$ содержатся все конъюнкции из fg, можно сделать вывод о пустоте класса fg, но это еще не обеспечивает несовместимости, которая возникает лишь между непустыми особенностями. Поэтому требуется еще проверить непустоту f и g, для которой необходимо, чтобы среди $E_i(x_1,..., x_n)$ имелось как подвыражение f, так и подвыражение g.

Такой способ представления отношений и выявления взаимосвязей является естественной основой для компьютеризации рассуждений. Представление булевых выражений $N(x_1,..., x_n)$ и $E_i(x_1,..., x_n)$ соответствующими типами данных – шкалами битов, в которых битам сопоставлены конъюнкции СДНФ, позволяет просто трансформировать правила оперирования суждениями в алгоритмы, осуществляющие умозаключения. Дальнейшее развитие кэрролловского метода алгебраизации рассуждения состоит в рассмотрении несоставных особенностей, выраженных в обобщенной добавлением третьего значения булевой алгебре.

Пример. Пусть имеются две посылки $xy \Rightarrow z$ и $xy' \Rightarrow z$, требуется установить, как взаимосвязаны особенности x и z.

$(xy \Rightarrow z) \equiv \mathsf{V}'xyz' \; \mathsf{V}xyz \; \mathsf{V}(x' \vee y')\, z' \; \mathsf{V}x\mathsf{V}x'\mathsf{V}y'\mathsf{V}z\mathsf{V}z'$,

$(xy' \Rightarrow z) \equiv \mathsf{V}'\, xy'z'\ \mathsf{V}\, xy'z\ \mathsf{V}(x' \vee y)\, z'\ \mathsf{V}x\mathsf{V}x'\mathsf{V}y'\mathsf{V}z.$

$(xy \Rightarrow z)(xy' \Rightarrow z) \equiv$

$\equiv\mathsf{V}'(xyz' \vee xy'z')\ \mathsf{V}xyz\ \mathsf{V}(x' \vee y')z'\ \mathsf{V}xy'z\ \mathsf{V}(x' \vee y)\, z'\ \mathsf{V}x\mathsf{V}x'\mathsf{V}y'\mathsf{V}z\mathsf{V}z'.$

Шкала для $N(x, y, z) \equiv (xyz' \vee xy'z')$ равна 00001010, где младшей (правой) единице соответствует индивидная конъюнкция xyz. Аналогично представляются шкалы для $E_i(x, y, z)$: выражению $E_1(x, y, z) \equiv xyz$ соответствует шкала 00000001, выражению $E_2(x, y, z) \equiv (x' \vee y')\, z'$ – шкала 10101000, $E_3(x, y, z) \equiv xy'z$ – шкала 00000100, $E_4(x, y, z) \equiv (x' \vee y)\, z'$ – шкала 10100010 и т.д. Предположим, что особенности x и z связаны отношением следования $(x \Rightarrow z) \equiv \mathsf{V}'xz'\ \mathsf{V}xz\ \mathsf{V}x'z'$, тогда особенности x и z' несовместимы, т.е. xz'-вещей не существуют, но существуют xz и $x'z'$-вещи. Для того, чтобы проверить, выполнены ли указанные условия, необходимо убедиться, что конъюнкция xz' входит в выражение $N(x, y, z)$, а конъюнкции $xz \equiv xyz \vee xy'z$ и $x'z' \equiv x'yz' \vee x'y'z'$ содержат какие-либо из E_i как подвыражения. Действительно, шкала 000001010, представляющая xz' совпадает со шкалой для $N(x, y, z)$, а шкалы 00000101 для xz и 10100000 для $x'z'$ содержат единицы в битах, в которых единицы содержатся в E_1 и E_3, т.е. xz- и x′z′-вещи существуют, и имеет место отношение $x \Rightarrow z$ имеет место.

Литература

1. Кэрролл Л. Символическая логика. // История с узелками. – М.: "Мир", 1973.

2. Carroll L. Symbolic logic / Ed., with annotations a. an introd. By Bartley W.W. - N.Y.: Clarkson N.Potter, 1977. - XXV, 496 p. – Cont.: Pt I: Elementary, Pt 2: Advanced, never previously published.

3. Брусенцов Н.П., Владимирова Ю.С. Конструктная компьютеризация силлогистики // Математические методы распознавания образов. ММРО-13. – М.: МАКС-Пресс, 2007. С. 10-13.

4. Брусенцов Н.П. Полная система категорических силлогизмов Аристотеля. // Вычислительная техника и вопросы кибернетики. Вып.19. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982. С. 3-17.

5. Владимирова Ю.С. Компьютеризация содержательного рассуждения на основе силлогистического вывода. // Программные системы и инструменты № 12. Под ред. Л.Н. Королева. – М.: Издательский отдел ВМиК МГУ, 2010. С. 92-97.

Опубликовано: Н.П. Брусенцов, Ю.С. Владимирова. Аристотелева силлогистика в символической логике Льюиса Кэрролла. М: - Фонд «Новое тысячелетие», 2011. С. 6-9