Владимирова Ю.С.

Компьютеризация содержательного рассуждения на основе силлогистического вывода

Автоматизация достоверного рассуждения становится возможной при наличии непарадоксального выражения отношения содержательного следования $x \Rightarrow y$, которое имеется в силлогистике Аристотеля в виде общей посылки «Всякое x есть y» (Axy).

Предметом исследования силлогистики являются взаимосвязи между особенностями, выражающими присущность (x), либо антиприсущность (x') рассматриваемым вещам применимых к ним качеств [1]. Вещь может характеризоваться наличием одной либо одновременно нескольких особенностей. В последнем случае вещь обладает составной особенностью, выражающейся конъюнкцией несоставных особенностей. Например, вещи, обладающей составной особенностью $x'y$ одновременно присущ y и антиприсущ x. Особенность может быть для вещи несущественной, тогда характеристика вещи составляется посредством дизъюнкции особенностей, например, для вещи, обладающей особенностью $xy \vee x'y \equiv y$ особенность x несущественна. В общем случае сущность вещи характеризуется булевым выражением, составленным из несоставных особенностей.

Силлогистические посылки наглядно представляются выражениями алгебры суждений существования вещей, восходящей к методам диаграмм и индексов Льюиса Кэрролла [2]. Взаимосвязь, задаваемая силлогистической посылкой, определяется тем, какие из возможных в данном рассмотрении вещей необходимо существуют, какие не могут существовать при ее наличии, а какие могут как существовать, так и не существовать, т.е. возможны, но не необходимы. Для алгебраического выражения статусов вещей используются так называемые суждения существования: $\mathsf{V}xy$ обозначает существование хотя бы одной xy-вещи, $\mathsf{V}'xy$ – отсутствие всех таких вещей, привходящему статусу соответствует умалчивание сведений о данности вещи.

Одновременное существование либо несуществование различных вещей выражается конъюнкцией соответствующих суждений существования, существование какой-либо из вещей, либо всех сразу – их дизъюнкцией. Например, $\mathsf{V}xy\mathsf{V}'x'y'$ означает одновременное наличие xy-вещей и отсутствие $x'y'$-вещей, $\mathsf{V}x'y \vee \mathsf{V}xy'$ – существование либо $x'y$-, либо xy'-вещи, либо их обеих сразу.

Необходимым условием достоверности представления силлогистических посылок оказалась их подчиненность гераклитову принципу сосуществования противоположностей (ПСП) [1], заключающемуся в допустимости рассмотрения особенности x только в том случае, если в наличии имеются как вещи, которым x присущ, так и вещи, которым x антиприсущ: $\mathsf{V}x\mathsf{V}x'$. Благодаря этому ограничению, из рассуждения исключаются такие абсурдные с точки зрения здравого смысла выводы, как следование чего угодно из безусловно ложного, а также следование из чего-либо всегда истинного.

Общая силлогистическая посылка «Всякое x есть y», тождественная отношению следования $x \Rightarrow y$, выражается конъюнкцией трех суждений существования, одно из которых означает несуществование вещей, одновременно обладающих качеством x и не обладающих качеством y (xy'-вещей), а два других – существование x- и y'-вещей:

$$x \Rightarrow y \equiv \mathrm{A}xy \equiv \mathsf{V}'xy'\mathsf{V}x\mathsf{V}y',$$

Частная посылка «Некоторые x есть y» характеризуется наличием xy-вещей и выполнением ПСП:

$$\mathrm{I}xy \equiv \mathsf{V}xy\mathsf{V}x'\mathsf{V}y'.$$

За счет того, что в силлогистических суждениях употребляются особенности, обозначающие наличие либо отсутствие качеств, пропадает необходимость использовать отрицательные суждения «Ни один x не есть y» ($\mathrm{E}xy$) и «Некоторые x не есть y» ($\mathrm{O}xy$), рассматривающиеся в традиционной силлогистике, поскольку [3]:

$$\mathrm{E}xy \equiv \mathrm{A}xy', \quad \mathrm{O}xy \equiv \mathrm{I}xy'.$$

Можно считать, что каждой особенности соответствует класс вещей – все вещи, обладающие данной особенностью. Например, особенности y' отвечает класс всех вещей, не обладающих y, т.е. обладающих особенностью «анти-y». Тогда суждение существования $\mathsf{V}xy$ можно понимать и как непустоту класса xy, а $\mathsf{V}'xy$ – его пустоту. Такая интерпретация дает простые правила преобразования выражений алгебры суждений существования:

1. $\mathsf{V}(xy \vee xy') \equiv \mathsf{V}xy \vee \mathsf{V}xy'$ – непустота класса вещей тождественна непустоте хотя бы одного его подкласса;
2. $\mathsf{V}'(xy \vee xy') \equiv \mathsf{V}'xy\mathsf{V}'xy'$ – если класс пуст, пусты все его подклассы;
3. $\mathsf{V}x\mathsf{V}'xy' \equiv \mathsf{V}xy\ \mathsf{V}'xy'$ – если класс непуст, но один из его подклассов пуст, дополнение этого подкласса непусто;
4. $\mathsf{V}xy \Rightarrow \mathsf{V}x$ – из непустоты подкласса следует и непустота охватывающего его класса вещей.

Применение этих правил дает алгебраические выражения всех модусов силлогистики. Например, согласно второму правилу,

$$\mathsf{V}'xyz\mathsf{V}'xy'z \equiv \mathsf{V}'(xyz \vee xy'z) \equiv \mathsf{V}'xz$$

осуществляется исключение среднего термина y, а, например, модус *barbara* получается следующим образом:

$$\mathrm{A}xy\mathrm{A}yz \equiv (\mathsf{V}'xy'\mathsf{V}xy\mathsf{V}x'y')(\mathsf{V}'yz'\mathsf{V}yz\mathsf{V}y'z') \equiv$$
$$\equiv \mathsf{V}'xy'\mathsf{V}'yz'\ \mathsf{V}xy\mathsf{V}x'y'\ \mathsf{V}yz\mathsf{V}y'z' \equiv$$

$$\equiv \mathsf{V}'xy'z\ \underline{\mathsf{V}'xy'z'}\mathsf{V}'\underline{xyz'}\mathsf{V}'x'yz'\ \underline{\mathsf{V}xy}\mathsf{V}x'y'\ \mathsf{V}yz\underline{\mathsf{V}y'z'} \equiv$$
$$\equiv \mathsf{V}'xy'z\ \mathsf{V}'xy'z'\mathsf{V}'xyz'\mathsf{V}'x'yz'\mathsf{V}xyz\mathsf{V}x'y'\mathsf{V}yz\mathsf{V}x'y'z' \equiv$$
$$\equiv \mathsf{V}'(xy'z \vee \underline{xy'z'} \vee \underline{xyz'} \vee x'yz')\ \mathsf{V}xyz\mathsf{V}x'y'\mathsf{V}yz\mathsf{V}x'y'z' \equiv$$
$$\equiv \mathsf{V}'(xy' \vee xz' \vee yz')\ \mathsf{V}xyz\mathsf{V}x'y'\mathsf{V}yz\mathsf{V}x'y'z' \equiv$$
$$\equiv \mathsf{V}'xy'\mathsf{V}'xz'\mathsf{V}'yz'\ \mathsf{V}xyz\mathsf{V}x'y'\mathsf{V}yz\mathsf{V}x'y'z' \Rightarrow \mathsf{V}'xz'\mathsf{V}xz\mathsf{V}x'z' \equiv \mathrm{A}xz.$$

Традиционная силлогистика ограничивается исследованием отношений между несоставными особенностями, каждая из которых соответствует наличию либо отсутствию у вещи только одного качества. Очевидно, что алгебра суждений существования допускает выражение отношений между составными особенностями, представленными произвольными булевыми выражениями и нахождение взаимосвязей между такими особенностями. Общая и частная посылки определяются в случае составных особенностей по тому же принципу, что и для несоставных.

Пусть $f(x_1,..., x_n)$ и $g(x_1,..., x_n)$ – булевы выражения, соответствующие составным особенностям f и g, где $x_1,..., x_n$ – несоставные особенности, задающие универсум рассмотрения, для которых соблюдается ПСП:

$$\mathsf{V}x_1\mathsf{V}x_1'...\ \mathsf{V}x_n\ \mathsf{V}x_n'.$$

Как и в случае несоставных особенностей, следование g из f $f \Rightarrow g$ имеет место, если всякая f-вещь является одновременно и g-вещью, т.е. не существует вещей, которым была бы одновременно присуща f и не присуща g, существуют f-вещи и существуют вещи, не обладающие особенностью g.

Отсутствие у вещи несоставной особенности x представляет собой ее инверсию x'. Для того, чтобы выразить отсутствие у вещи составной особенности g, будем считать, что выражение g приведено в СДНФ. Тогда всякая вещь, особенность которой выражается индивидной конъюнкцией, входящей в число индивидных конъюнкций g, либо дизъюнкцией нескольких таких конъюнкций, будет обладать и особенностью g. Напротив, все вещи, особенности которых выражаются индивидными конъюнкциями, не входящими в СДНФ g, либо их дизъюнкцией, не обладают особенностью g. Таким образом, не обладают особенностью g вещи, характеризующиеся особенностью $\overline{g}$, обозначающей дополнение g до универсума.

Аналогично, сущность вещей, которым присуща особенность f и не присуща g, можно выразить как $f\overline{g}$, считая f и g приведенными в СДНФ.

Это означает, что общая посылка «всякое f есть g» выражается следующим образом:

$$\mathrm{A}fg \equiv \mathsf{V}'\ f\overline{g}\,\mathsf{V}f\mathsf{V}\overline{g}\ \text{ПСП}(x_1,..., x_n).$$

Подобными рассуждениями можно также показать, что

$$\mathrm{A}fg \equiv \mathsf{V}'\, f\,\overline{g}\, \mathsf{V} f\, \mathsf{V}\, \overline{g}\ \text{ПСП}(x_1,\ldots, x_n) \equiv \mathsf{V}'\, f\,\overline{g}\, \mathsf{V} fg\, \mathsf{V}\, \overline{f}\,\overline{g}\ \text{ПСП}(x_1,\ldots, x_n).$$

Пример общей посылки, связывающей составные особенности: «всякий треугольник, содержащий прямой угол является неравносторонней фигурой». Эта взаимосвязь имеет место, поскольку не существует фигур, являющихся треугольниками с прямым углом, и при этом равносторонних. Пусть x означает «быть треугольником», y – «содержать прямой угол», z – «быть равносторонним». Тогда не существует xyz-вещей, но существуют как xyz'-вещи, так и вещи, не являющиеся xy-, но обладающие особенностью z, т.е. $\overline{xy}z \equiv (x' \vee y')\, z$:

$$\mathsf{V}'xyz\, \mathsf{V}xyz'\, \mathsf{V}(x' \vee y')\, z.$$

Суждения существования в данном выражении утверждают наличие всех несоставных особенностей, поэтому ПСП(x, y, z) соблюден. Полученное выражение означает, что треугольник с прямым углом (xy-вещь) не может быть равносторонним (z'-вещью). С другой стороны, в силу контрапозитивности отношения следования, если имеется равносторонняя фигура (z-вещь), то можно сказать, что либо она не треугольник (т.е. есть x') и может содержать прямой угол (быть y-вещью), либо не содержит прямой угол (есть y') и может быть треугольником (быть x-вещью).

Частное силлогистическое суждение, задающее взаимосвязь между составными особенностями $\mathrm{I}fg$ выражается аналогично:

$$\mathrm{I}fg \equiv \mathsf{V}fg\, \mathsf{V}\, \overline{f}\ \mathsf{V}\, \overline{g}\ \text{ПСП}(x_1,\ldots, x_n).$$

Получение силлогистического вывода осуществляется так же, как и для несоставных особенностей: исходные посылки конъюнктивно совмещаются, и в полученном выражении отыскиваются взаимосвязи между исследуемыми особенностями, в то время как особенности, несущественные для рассмотрения, элиминируются.

Каждая исходная посылка имеет вид

$$\mathsf{V}'F\mathsf{V}G_1\mathsf{V}G_2 \quad \text{либо} \quad \mathsf{V}G_1\mathsf{V}G_2\mathsf{V}G_3,$$

где F, G_1, G_2, G_3 – булевы выражения. Кроме того для произвольных булевых выражений f и g

$$\mathsf{V}'f\ \mathsf{V}'g \equiv \mathsf{V}'(f \vee g),$$

а $\mathsf{V}f\mathsf{V}g$ в общем случае нельзя привести к одному суждению существования. Поэтому, выражение, получаемое в результате конъюнкции исходных посылок, имеет вид:

$$\mathsf{V}'P\mathsf{V}Q_1\mathsf{V}Q_2\ldots\mathsf{V}Q_l,$$

где $P \equiv p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_{\mathrm{k}}$ и $Q_i \equiv q_{i1} \vee q_{i2} \vee \ldots \vee q_{im}$ – соответствующие СДНФ, p_i и q_{ij} – их индивидные конъюнкции. По правилу 3, если часть непустого класса пуста, то остальная его часть обязана быть непустой. Тогда из всех Q_i могут быть исключены индивидные конъюнкции, содержащиеся в P, – вещи, обладающие особенностями p_i, не существуют. В то же время ни из одной особенности Q_i нельзя изъять таким образом все конъюнкции, т.к. в этом случае одна из исходных посылок перестанет удовлетворять ПСП.

Заметим, что интерпретация выражений P и Q_i неодинакова: каждое выражение Q_i обозначает лишь существование вещи, обладающей особенностью Q_i, но не существование каждой вещи, охарактеризованной любым q_{ij}. Последние находятся в третьем-привходящем статусе, они лишь возможны, но не даны. Вместе с тем несуществование вещей, обладающих P говорит о несуществовании каждой вещи с особенностью p_i.

Пусть требуется установить, имеется ли в условиях, заданных указанной системой посылок, взаимосвязь между двумя составными особенностями $u(x_1,..., x_n)$ и $v(x_1,..., x_n)$. Наличие в $P(x_1,..., x_n)$ подвыражения $u\bar{v}$, говорит о том, что имеет место $\mathrm{A}uv$, наличие uv – о том, что $\mathrm{A}u\bar{v}$, наличие $\bar{u}v$ доказывает $\mathrm{A}vu$, данность $\bar{u}\bar{v}$ – $\mathrm{A}u\bar{v}$. Если же ни одного из этих четырех подвыражений в P нет, то общего заключения нет, т.е. отношением следования u и v не связаны. Но возможны частные заключения: $\mathrm{I}uv$, $\mathrm{I}u\bar{v}$, $\mathrm{I}\bar{u}v$ или $\mathrm{I}\bar{u}\bar{v}$; для их выявления следует отыскивать среди выражений Q_i такие, которые, являются подвыражениями одного из четырех: uv, $u\bar{v}$, $\bar{u}v$ или $\bar{u}\bar{v}$. Так как вещи, обладающие особенностью Q_i, существуют то существуют также и вещи, обладающие особенностью, отвечающей СДНФ, содержащей Q_i как подвыражение. Например, если какое-либо из Q_i равно индивидной конъюнкции, входящей в СДНФ uv, то можно сделать вывод, что раз непуст подкласс uv, то непуст и весь этот класс, и имеет место частное суждение $\mathrm{I}uv$.

Программная реализация силлогистического вывода основывается на представлении составных особенностей – булевых выражений в СДНФ, соответствующими 2^n-битными шкалами, в которых битам сопоставлены в определенном порядке индивидные конъюнкции. Определить, является одно выражение подвыражением другого, можно побитной конъюнкцией шкалы, соответствующей первому выражению со шкалой, представляющей дополнение второго выражения.

Пример. Пусть имеются две посылки $\mathrm{A}(xy)z'$ и $\mathrm{A}(xy')z$, требуется проверить, как взаимосвязаны особенности x и z.

$\mathrm{A}(xy)z \equiv \mathsf{V}'xyz\ \mathsf{V}xyz'\ \mathsf{V}(x' \vee y')\ z\ \mathsf{V}x\mathsf{V}x'\mathsf{V}y'\mathsf{V}z\mathsf{V}z'$,

$\mathrm{A}(xy')z' \equiv \mathsf{V}'\ xy'z\mathsf{V}\ xy'z\ \mathsf{V}(x' \vee y)\ z'\ \mathsf{V}x\mathsf{V}x'\mathsf{V}y'\mathsf{V}z$.

$\mathrm{A}(xy)z\ \mathrm{A}(xy')z' \equiv$

$\equiv \mathsf{V}'(xyz \vee xy'z)\ \mathsf{V}xyz'\ \mathsf{V}(x' \vee y')z\ \mathsf{V}xy'z\ \mathsf{V}(x' \vee y)\ z'\ \mathsf{V}x\mathsf{V}x'\mathsf{V}y'\mathsf{V}z\mathsf{V}z'$.

Шкала для $P(x, y, z) \equiv (xyz \vee xy'z)$ равна 00000101, где младшей (правой) единице соответствует индивидная конъюнкция xyz. Аналогично представляются шкалы для $Q_i(x, y, z)$: выражению $Q_1(x, y, z) \equiv xyz'$ соответствует шкала 00000010, выражению $Q_2(x, y, z) \equiv (x' \vee y')\ z$ – шкала 01010100 и т.д. Предположим, что особенности x и z' связаны отношением «Всякое x есть не-z» ($\mathrm{A}xz'$), тогда выражение xz должно быть подвыражением $P(x, y, z)$. Шкала 00000101, представляющая xz совпадает со шкалой для $P(x, y, z)$, т.е. отношение Axz' в условиях, заданных посылками, выполняется.

Литература

Брусенцов Н.П., Владимирова Ю.С. Конструктная компьютеризация силлогистики // Математические методы распознавания образов. ММРО-13. – М.: МАКС-Пресс, 2007. С. 10-13.

Кэрролл Л. Символическая логика // Льюис Кэрролл. История с узелками. – М.: «Мир», 1973, с.189-361.

Брусенцов Н.П. Исчерпывающее решение «неодолимой» проблемы парадоксов. – М., Фонд «Новое тысячелетие», 2008. – 8 с.

Опубликовано: Программные системы и инструменты № 12. Под ред. Л.Н. Королева. – М.: Издательский отдел ВМиК МГУ, 2010. С. 92-97.